Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 27, núm. 1, 2012. Pàg. 63–113. DOI: 10.2436/20.2002.01.42

# El món de les variables sense moments finits de tots els ordres: de la paradoxa de Sant Petersburg als processos de Lévy

Josep Lluís Solé

**Resum:** Les variables aleatòries sense moments de tots els ordres no són actualment una patologia, sinó que ocupen una posició central en la teoria de la probabilitat. Des de la paradoxa de Sant Petersburg, de començaments del segle XVIII, fins a les distribucions estables no gaussianes i als vols de Lévy, s'ha desenvolupat una teoria plena de bellesa, de la qual us pretenem presentar alguns aspectes en aquest article. Acabem amb unes aplicacions a distintes situacions, entre aquestes una nova mirada a la vella paradoxa de Sant Petersburg, i una descripció de l'evolució de la temperatura de la Terra en els darrers 250.000 anys, com a tast de la seva importància en la modelització matemàtica de la realitat.

Paraules clau: moments, cumulants, lleis dels grans nombres, lleis estables, lleis infinitament divisibles, processos de Lévy.

Classificació MSC2010: 60-01, 60G51, 60G52.

## 1 Introducció

La idea d'*esperança*, el primer moment d'una variable aleatòria, fou introduïda per Huygens el 1657 en el llibre *De ratiociniis in ludo aleae*. Aquest científic holandès, però, és més conegut pels seus estudis astronòmics sobre els anells de Saturn i el descobriment de Tità, així com pels seus treballs en física, sobretot en òptica.

L'*esperança* és l'anàleg, per a la distribució d'una variable aleatòria, al concepte de *centre de gravetat d'un cos* en la mecànica (secció 2). Huygens comenta sobre l'esperança que altres matemàtics francesos, referint-se a Pascal i Fermat, ja l'havien utilitzat, encara que quedà amagada, així com els seus mètodes i, per tant, no s'atribueix a ell mateix l'honor de la seva invenció.

Les lleis dels grans nombres, les quals tenen també una llarga història, són les que justifiquen l'elecció de l'esperança com a paràmetre representatiu dels valors d'una variable (secció 3). Intuïtivament ens diuen que si agafem sota condicions apropiades una mostra aleatòria, la mitjana de les dades obtingudes convergeix en un cert sentit cap a l'esperança. Les lleis dels grans nombres portaren a la definició de *joc just* i al càlcul de la quota d'entrada adequada que s'havia de pagar perquè el joc ho fos, la qual era l'esperança dels premis, de manera que l'esperança dels guanys nets, és a dir de la diferència entre premis i quotes, fos zero.

Aquest concepte de *joc just* dóna lloc a situacions paradoxals, en les quals ningú hi veuria la justícia i equitat per enlloc. De fet, la idea de *joc just* està més lligada al teorema central del límit, i amb més generalitat, quan el temps hi intervé, al concepte de *martingala*, que a les lleis dels grans nombres.

Molt aviat es veié que hi havia lleis de probabilitat que no tenien esperança finita. Kolmogorov i Feller, utilitzant el truncament de les variables, proposaren la seva celebrada extensió de la llei dels grans nombres per a variables sense esperança, que és coneguda avui com la *llei feble dels grans nombres* de Kolmogorov i Feller (KF). L'adjectiu *feble*, aplicat a la llei, vol dir que la convergència obtinguda és en probabilitat, mentre que el de *fort* indicaria que la convergència és en sentit quasi segur. Aquest és un tema en el qual encara ara es treballa i, per exemple, Gutt [15] publicà, el 2004, una generalització de la llei KF esmentada (secció 4).

Entre les variables sense esperança finita, potser la més popular, des del segle XVIII, és la que descriu els premis del joc que portà a la famosa *paradoxa de Sant Petersburg* (secció 5). Aquest nom es deu al fet que, el 1738, Daniel Bernoulli publicà un celebrat article sobre la qüestió a la revista de l'Acadèmia de Ciències d'aquesta ciutat. Aquest article es considera el primer en el qual s'introdueix una funció d'utilitat, tan populars en molts àmbits avui dia. De totes maneres, el problema de Sant Petersburg ja va ser proposat pel cosí d'en Daniel, en Nicolas Bernoulli, en una carta adreçada a Montmort vint-i-cinc anys abans, i provocà una intensa correspondència entre els dos cosins Bernoulli, Montmort i Cramer.

Feller a [11] es preguntà quines eren les quotes acumulades apropiades $q_n$ després de $n$ realitzacions del joc de Sant Petersburg, de manera que la proporció amb els premis acumulats, quan $n \to \infty$, tendís en probabilitat cap a 1, i trobà (secció 5) que $q_n = n \log_2 n$.

A continuació (secció 6.1) introduïm els moments d'ordre superior a 1, i presentem variables aleatòries que tenen moments finits tan sols fins a un cert ordre. Si la llei té moments finits de tots els ordres pot ser que existeixi la funció generatriu de moments (secció 6.2), la qual la determinarà de manera única.

El que es coneix com a *problema dels moments* vol generalitzar aquesta qüestió. És a dir, es pregunta quan una llei amb moments finits de tots els ordres queda caracteritzada de manera única per aquests (secció 6.3). La primera monografia publicada per l'American Mathematical Society (AMS) [43] va ser dedicada a aquesta qüestió, i encara avui no coneixem una condició que sigui necessària i suficient per a la caracterització.

Presentem després el concepte de *cumulant*, introduït per l'astrònom danès Thiele, i estudiem els polinomis que ens permeten passar dels cumulants als moments, anomenats *polinomis de Bell* (secció 7). La idea de *cumulant* és fonamental també en el camp de les probabilitats lliures (*free probability*), que corresponen a un escenari no commutatiu, objecte ara d'una recerca intensa.

D'altra banda, Lévy (secció 8.1) introduí les lleis estables, les quals, excepte la gaussiana, no tenen moments finits d'ordre 2, i algunes ni esperança finita (secció 8.2). Les lleis estables són els únics possibles límits en llei de transformacions afins apropiades de les sumes parcials associades a successions de variables independents i idènticament distribuïdes, propietat que ha donat lloc a l'apassionant estudi dels dominis d'atracció (secció 8.3).

Les lleis estables són una subfamília de les infinitament divisibles (ID). La funció característica d'una llei ID té una expressió donada pel teorema 8.4, conegut com el *teorema de Lévy-Khintchine*, que ens porta al concepte de *mesura de Lévy*, la qual no té per què ser una probabilitat. L'atractiu teorema 8.7 ens relaciona l'existència de moments d'una llei infinitament divisible amb la dels moments de la mesura de Lévy associada, els quals estan íntimament lligats amb els cumulants.

Finalment, arribem als processos de Lévy (secció 9), que són les generalitzacions a temps continu de les marxes aleatòries. Les variables d'aquests processos tenen lleis infinitament divisibles, i les seves trajectòries poden presentar discontinuïtats. Els processos de Lévy han estat objecte d'una gran atenció per part dels matemàtics en els darrers anys, i fins i tot se'ls ha dedicat una subcol·lecció de *Lecture Notes in Mathematics*.

Estudiem també els moments i els cumulants de les variables del procés, en el cas que siguin finits, i la seva relació amb els moments de la mesura de Lévy de la llei en el temps $t = 1$ (secció 9.1). Aquests moments són fonamentals en l'estudi dels polinomis harmònics espai-temps associats al procés de Lévy, polinomis en dues variables tals que, en aplicar-los al mateix procés de Lévy i al temps, obtenim martingales.

Els processos de Lévy amb lleis estables (secció 11) són els que compleixen una condició d'autosimilitud del tipus que tant agradava a Mandelbrot. S'anomenen vols de Lévy (*Lévy flights*), i són molt emprats per a modelitzar diferents fenòmens, sobretot en física i en economia.

Acabem l'article amb uns exemples de modelització amb lleis sense moments de tots els ordres i amb vols de Lévy (secció 12). Concretament, comentem la modelització dels *log-returns* financers, és a dir de la diferència entre els logaritmes del preu d'un actiu en un moment $t + \Delta$ i en el moment $t$, i veiem que estan descrits per lleis sense moments de tots els ordres, i que la dinàmica dels preus és donada per l'exponencial d'un procés de Lévy.

Després tornem a la paradoxa de Sant Petersburg i en fem un nou estudi sota la llum de les distribucions infinitament divisibles. Continuem amb una aplicació a l'estudi de la distribució de terratrèmols, i finalitzem l'article amb un model d'evolució de les temperatures mitjanes a l'Atlàntic nord en els darrers 250.000 anys, en el qual s'utilitza un procés de Lévy estable com a soroll per a explicar les dades de temperatura obtingudes a partir de mostres de gel d'una gelera de Groenlàndia.

C. Huygens.

Estudi dels anells de Saturn.

## 2 L'esperança d'una variable aleatòria

Donada una variable aleatòria real, la seva llei és l'anàleg a la distribució de masses d'un cos unidimensional amb massa total 1, substituint el concepte de *massa* pel de *probabilitat*, i les coordenades dels punts pels valors de la variable.

Podem definir el concepte físic de *moment*, respecte al punt de l'origen, d'una distribució de masses puntuals unidimensional com la suma dels productes de les masses per les seves coordenades. Aquesta idea física de *moment* té com a corresponent en la teoria de la probabilitat el concepte d'*esperança*.

Si tenim $N$ masses puntuals, $m_1, \ldots, m_N$, amb massa total 1, col·locades en les coordenades $x_1, \ldots, x_N$, el moment físic és, doncs, $\sum_{i=1}^N x_i m_i$. Si ara passem, com hem explicat, a la llei d'una variable aleatòria $X$ amb valors $x_1, \ldots, x_N$ i probabilitats respectives $p_1, \ldots, p_N$, la seva esperança, que denotarem per $E(X)$, serà $\sum_{i=1}^N x_i p_i$.

La utilització de la lletra $E$ per a denotar l'esperança ve de començaments del segle XX. Fou emprada per primera vegada per W. A. Withworth en el llibre *Choice and chance.* A [44] comenten que aquest símbol esdevingué de seguida popular, ja que és la lletra inicial de la paraula anglesa *expectation*, de l'alemanya *Erwartungswert* i de la francesa *espérance mathématique.*

Si la distribució té ara una col·lecció numerable de masses puntuals, també amb massa total 1, la variable aleatòria de l'analogia tindrà infinits valors i la seva esperança serà ara la sèrie $\sum_{i=1}^\infty x_i p_i$. Perquè aquesta sigui convergent haurem d'afegir la condició tècnica que sigui absolutament sumable. Direm en aquest cas que la variable té esperança finita.

En el cas que la distribució de masses tingui una densitat $\rho(x)$ i massa total 1, aleshores el moment físic serà $\int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,\mathrm{d}x$. La variable aleatòria de l'analogia tindrà una llei de probabilitat amb funció de densitat $\rho(x)$ i, per tant, $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,\mathrm{d}x$. També ara, perquè la integral tingui sentit i l'esperança sigui finita, haurem d'imposar la condició tècnica $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\rho(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.

Intuïtivament, l'esperança d'una variable aleatòria real seria el centre de gravetat de la seva llei, en el sentit que si agafem com a nou origen l'esperança, el nou moment (o la *nova esperança* en la terminologia de probabilitats) serà nul. Si imaginem una palanca, el centre de gravetat és el punt on hauríem de posar el fulcre per a obtenir l'equilibri, i anàlogament l'esperança seria el punt d'equilibri de la llei.

Una llei de probabilitat és determinada per la seva funció de distribució $F$ definida com $F(x) = P(X \leq x),\ x \in \mathbb{R}$. Aquesta funció, que pren valors en l'interval $[0,1]$ ja que la imatge és una probabilitat, és creixent, i defineix una mesura, que denotem també per $F$, tal que $F\big((a,b]\big) = F(b) - F(a) = P\big(X \in (a,b]\big)$, $a < b$. Aquesta mesura pren el mateix valor que la llei de la variable aleatòria $X$ en els intervals oberts per l'esquerra i tancats per la dreta. Com que la llei queda determinada de manera única pels seus valors en el conjunt d'aquests intervals, la mesura definida per la funció de distribució $F$ i la llei de la variable coincideixen.

Per a una variable aleatòria real $X$ general, definim l'esperança com la integral de $x$ respecte a la mesura determinada per $F$, és a dir per la funció de distribució de la variable, per tant,

$$E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x\, F(\mathrm{d}x).$$

Perquè aquesta integral sigui finita, haurem d'imposar la condició tècnica usual

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, F(\mathrm{d}x) < \infty\,,$$

que ja ens havia aparegut en els casos anteriors.

Si la variable aleatòria $X$ és no negativa les integrals anteriors coincideixen. Aquesta integral o és finita i, com hem dit, $X$ tindrà esperança finita, o val $+\infty$ i aleshores direm que té esperança infinita.

En el cas que $X$ sigui una variable aleatòria general, l'expressem com la diferència de la seva part positiva i la negativa, $X^+$ i $X_-$, les quals són ja variables no negatives. Aleshores, si $X^+$ i $X_-$ tenen esperança finita, l'esperança de $X$ serà finita, i valdrà $E(X^+) - E(X_-)$. Si una és finita i l'altra no, direm que $E(X) = +\infty$ o $E(X) = -\infty$ segons si és la part positiva o la negativa la que té esperança infinita. Finalment, si les dues esperances són infinites, $X$ serà una variable aleatòria sense esperança.

La definició d'*esperança* que acabem de donar engloba tots els casos citats a l'inici de la secció, ja que si la variable és discreta amb valors $x_1, x_2, \ldots$ la integral es converteix en una sèrie i $p_i = P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i-)$, on $F(x_i-)$ és el límit per l'esquerra de $F$ en el punt $x_i$, és a dir la diferència anterior serà el valor del salt de la funció $F$ en $x_i$. Si hi ha funció de densitat $\rho(x)$, la mesura seria $F(\mathrm{d}x) = \rho(x)\,\mathrm{d}x$.

El problema de l'existència d'esperança finita és, doncs, un problema de les cues de la llei, és a dir del comportament de la distribució de probabilitat quan

$|x| \to \infty$. El decreixement d'aquestes ha de ser prou ràpid com per a compensar el creixement de $|x|$.

Evidentment si una variable té els seus valors dintre d'un compacte de $\mathbb{R}$, les seves cues seran nul·les i, per tant, l'esperança serà finita. Si aquesta condició no es dóna, aleshores les cues han de decréixer suficientment ràpid, de manera que la probabilitat dels intervals $(n, n+1]$ i $(-n, -n-1]$ sigui prou petita, quan $n \to \infty$, perquè l'esperança sigui finita.

Acabem aquesta secció amb diversos exemples. Comencem considerant una llei gaussiana de paràmetres $(\mu, \sigma^2)$, és a dir amb una densitat $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Com que el decreixement de l'exponencial sempre guanyarà $|x|$, tindrem esperança finita. Com que la densitat és simètrica respecte a $\mu$, l'esperança, per l'analogia amb el centre de gravetat de la mecànica, valdrà $\mu$.

Si la variable aleatòria $X$ té una llei de Cauchy, és a dir una funció de densitat

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

encara que sigui simètrica respecte a l'origen i, per tant, que la intuïció ens porti a dir que l'esperança serà zero, el decreixement a l'infinit de la densitat no pot compensar el creixement de $|x|$, i la funció $\frac{|x|}{1+x^2}$ no té integral finita respecte a la mesura de Lebesgue. D'altra banda, $E(X^+)$ i $E(X_-)$ són simultàniament $+\infty$. Com a conseqüència, una variable amb llei de Cauchy és un exemple de variable sense esperança.

## 3 Lleis dels grans nombres i jocs justos

Les lleis dels grans nombres són un dels conjunts de teoremes més fonamentals de la teoria de la probabilitat, i expliquen en part la importància de l'esperança d'una variable aleatòria. Bàsicament ens diuen que si tenim una mostra d'una llei, que podem formalitzar com una successió de variables aleatòries $X_1, X_2, \ldots$ independents i idènticament distribuïdes (i. i. d.), i $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ és la suma de les $n$ primeres, la mitjana $\frac{S_n}{n}$ convergeix, en algun sentit, cap a l'esperança en el cas que aquesta existeixi.

Recordem ara les definicions de dos dels diferents tipus de convergència per a successions de variables aleatòries, concretament la convergència *en probabilitat* i la *quasi segura*:

DEFINICIÓ 3.1. Direm que la successió $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix en probabilitat cap a $\mu \in \mathbb{R}$ si, per a qualsevol $\epsilon > 0$, es compleix que

$$P[|X_n - \mu| > \epsilon] \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

DEFINICIÓ 3.2. Direm que la successió $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix quasi segurament cap a $\mu \in \mathbb{R}$ si existeix un conjunt $N$, amb $P(N) = 0$, tal que si $\omega \in N^c$ aleshores $\{X_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeix cap a $\mu$.

Les lleis dels grans nombres que tenen relació amb la convergència en probabilitat s'anomenen *lleis febles*, i les lligades amb la convergència quasi segura, *lleis fortes*. Donarem ara una versió de la llei forta, molt general, deguda a Kolmogorov [39, pàg. 366]:

TEOREMA 3.3. *Sigui $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successió de variables i. i. d. amb esperança finita $\mu$. Aleshores $\frac{S_n}{n}$ convergeix cap a l'esperança $\mu$, és a dir*

$$\frac{S_n - n\mu}{n} \longrightarrow 0,$$

*en sentit quasi segur.*

Com que la convergència quasi segura implica la convergència en probabilitat, aquest resultat ens dóna també la convergència en probabilitat cap a l'esperança, és a dir, una llei en sentit feble.

Les lleis dels grans nombres varen portar, en el segle XVIII, a classificar els jocs d'apostes. Considerem que juguem repetidament a un joc. El premi que rebo en el joc enèsim el descric per la variable aleatòria $X_n$, i la successió $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la considerem i. i. d. per hipòtesi. Suposem que l'esperança de les variables és finita i la denotem per $\mu$. Aleshores, si per jugar cada vegada pago una quota constant $q$, el guany net acumulat, és a dir la suma dels premis menys la de les quotes d'entrada, obtingut fins a la tirada $n$ inclosa seria $S_n - nq$. Com que per la llei dels grans nombres $\frac{S_n}{n}$ convergeix cap a $\mu$, la proporció $\frac{S_n - nq}{n}$, que és la mitjana dels guanys nets després de $n$ jocs, tendirà cap a $\mu - q$. Aquest fet motivà la classificació dels jocs següents, segons el signe de $\mu - q$ (vegeu [12, pàg. 256]):

Direm que un joc és favorable si $\mu > q$, i desfavorable si $\mu < q$. En el cas $\mu = q$, el joc l'anomenarem *just*.

Els dos primers casos són clars. Si $\mu - q > 0$, la mitjana dels beneficis nets s'acostarà quasi segurament a un número estrictament positiu i, per tant, a partir d'un moment, que dependrà de $\omega$, la successió de la mitjana de guanys nets serà positiva amb probabilitat 1 i el joc és favorable per al jugador. Si $\mu - q < 0$, podem argumentar de manera paral·lela per veure que el joc és desfavorable per al jugador.

Si $\mu = q$, l'únic que ens diu el teorema és que $\frac{S_n - nq}{n}$ convergeix cap a zero. Però d'aquí no deduïm que el numerador $S_n - nq$ tingui un signe determinat, ni tan sols que estigui fitat, sinó només que el denominador domina el numerador. Podria passar que $S_n - nq$ prengués valors molt negatius, i això ens suggereix que el concepte clàssic de joc *just* no és gaire apropiat.

Per exemple, Feller a [11] construeix un joc amb esperança de premis 1 i que, per tant, si la quota d'entrada és també 1, el joc seria just segons la classificació que hem donat. Demostra, però, que podem trobar una successió que decreix cap a $-\infty$, de manera que les probabilitats que les pèrdues acumulades en $n$ jocs siguin més negatives que els elements de la successió donada vagin cap a 1.

Podem concloure, doncs, que la definició clàssica de joc *just* que hem donat, basada en la llei dels grans nombres, no és apropiada. La idea de *justícia* estaria més aviat lligada al teorema central del límit, però, com sabem, aquest necessita que les variables tinguin variància, és a dir moment de segon ordre.

## 4 Lleis dels grans nombres sense esperança finita

En la secció anterior hem vist que a les hipòtesis de la llei forta dels grans nombres (teorema 3.3) exigíem tractar amb una llei amb esperança finita.

En el cas que $E(X)$ sigui $+\infty$ o $-\infty$, és un corol·lari de la llei forta de Kolmogorov afirmar que $\frac{S_n}{n}$ tendirà respectivament cap a $+\infty$ o $-\infty$ en sentit quasi segur (vegeu [39, pàg. 368]).

Naturalment, els matemàtics es preguntaren per generalitzacions a lleis que no tinguin esperança. El mateix Kolmogorov demostra que, en aquest cas,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n} \longrightarrow \infty.$$

També sorgí la qüestió sobre què és el que hauria de substituir $\mu$, si no hi ha esperança finita, en l'expressió $\frac{S_n - n\mu}{n}$. Un brillant resultat en aquesta línia és el teorema de Kolmogorov-Feller (vegeu [13, secció VI.7] i [15]), en el qual s'utilitza la variable truncada per a donar sentit al càlcul de l'esperança:

Teorema 4.1. *Siguin $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatòries i. i. d., totes amb la mateixa llei que una variable $X$, i $S_n, n \geq 1$, les sumes parcials $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Aleshores tenim la convergència en probabilitat següent:*

$$\frac{S_n - nE[X\mathbf{1}_{\{|X|\leq n\}}]}{n} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

*si i només si*

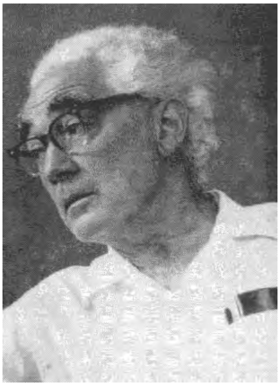
$$xP(|X| > x) \longrightarrow 0, \quad x \to \infty. \tag{4.1}$$

Evidentment, si existeix esperança finita la condició (4.1) es compleix, però el recíproc no és cert. Per exemple, la densitat següent:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2 \ln|x|}, & \text{per a } |x| > 2, \\ 0, & \text{en altre cas,} \end{cases}$$

on $c$ és la constant normalitzadora adequada, no té esperança finita però satisfà (4.1).

A. Kolmogorov.



W. Feller.

En un article recent, Gutt [15] ha generalitzat el teorema de Kolmogorov i Feller, canviant la $n$ del truncament i del denominador per una successió donada per una funció que varia regularment a l'infinit. Recordem la definició d'aquest tipus de funcions:

DEFINICIÓ 4.2. Sigui $a > 0$. Direm que una funció mesurable $u$ definida en $[a, +\infty)$ varia regularment a l'infinit amb exponent $\rho, -\infty < \rho < +\infty$, i ho denotarem per $u \in \mathcal{RV}(\rho)$, si i només si per a qualsevol $x > 0$,

$$\frac{u(tx)}{u(t)} \longrightarrow x^\rho, \quad t \to \infty .$$

Si $\rho = 0$, la funció s'anomena *de variació lenta* a l'infinit ($u \in \mathcal{SV}$).

Els típics exemples de funcions de variació regular són

$$x^\rho, \; x^\rho \ln^+ x, \; x^\rho \ln^+ \ln^+ x, \ldots$$

i, d'altra banda,

$$1, \; \ln^+ x, \; \ln^+ \ln^+ x, \ldots$$

són funcions de variació lenta.

Podeu trobar una introducció rapidíssima al món d'aquestes funcions a [14, annex 7].

El teorema de Gutt [15] és el següent:

TEOREMA 4.3. *Siguin $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatòries i. i. d., totes amb la mateixa llei que la d'una variable $X$, i $S_n, n \geq 1$, les sumes parcials $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Fixem una funció $b \in \mathcal{RV}(\frac{1}{\rho})$ amb $\rho \in (0, 1]$, és a dir, per a $x > 0$, $b(x) = x^{\frac{1}{\rho}} l(x), l \in \mathcal{SV}$. Finalment, considerem la successió $b_n = b(n), n \geq 1$. Aleshores tenim la convergència en probabilitat següent:*

$$\frac{S_n - nE[X\mathbf{1}_{\{|X| \leq b_n\}}]}{b_n} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

*si i només si*

$$nP(|X| > b_n) \longrightarrow 0, \quad n \to \infty. \tag{4.2}$$

Si $\rho = 1$ i $l(x) = 1$, la condició de Gutt és exactament la de Kolmogorov-Feller, i retrobem el teorema clàssic.

Per exemple, per a la distribució de Pareto amb $0 < \rho \leq 1$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\rho}{2|x|^{1+\rho}}, & \text{si } |x| > 1, \\ 0, & \text{en altre cas,} \end{cases}$$

la funció $b(x) = (x \log x)^{\frac{1}{\rho}}$, que és a $\mathcal{RV}(\frac{1}{\rho})$, ens donaria $b_n = b(n) = (n \log n)^{\frac{1}{\rho}}$, i es compliria la condició (4.2). Quan $\rho = 1$ tenim un exemple d'una llei que no satisfà la condició de Kolmogorov-Feller (4.1), però que en canvi compleix (4.2).

## 5 La paradoxa de Sant Petersburg

Aquesta paradoxa rep el seu nom de l'article «Specimen theoriae novae de mesura sortis», escrit per Daniel Bernoulli i publicat el 1738 a *Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, que era la revista de l'Acadèmia de Ciències de Sant Petersburg (noteu la utilització del llatí com a llengua de cultura a l'Europa del segle XVIII). Podeu llegir la traducció a l'anglès a [2].

El problema, però, fou originalment proposat pel cosí d'en Daniel, en Nicolas Bernoulli, el qual el plantejà en una carta a Pierre Raymond de Montmort el 9 de setembre de 1713. Aquesta carta va ser, com hem dit a la introducció, l'inici d'una intensa correspondència sobre el tema entre Nicolas Bernoulli, Montmort, Cramer i Daniel Bernoulli.

El problema és el següent: juguem a un joc en què la banca va llançant una moneda fins que surt cara. Si surt a la primera tirada ens paga 2 euros, si surt a la segona 4, a la tercera 8, i així successivament, de manera que si la primera cara apareix a la tirada enèsima rebem $2^n$ euros. A partir de l'estudi de la llei geomètrica sabem que la probabilitat que no surti mai una cara en una successió infinita de tirades de la moneda és nul·la i, per tant, amb probabilitat 1 sempre rebrem premi.

Sigui $X$ la variable que descriu el premi que ens paguen quan juguem un joc, entenent per *joc* el dret a fer totes les tirades de moneda que calguin fins a obtenir la primera cara. La llei de $X$ és discreta, amb rang de valors $\{2^i, i \geq 1\}$, i amb probabilitats respectives $\{\frac{1}{2^i}, i \geq 1\}$. L'esperança d'aquesta variable és

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i P(X = 2^i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} 2^i \frac{1}{2^i} = 1 + 1 + \cdots,$$

per tant, val $+\infty$.

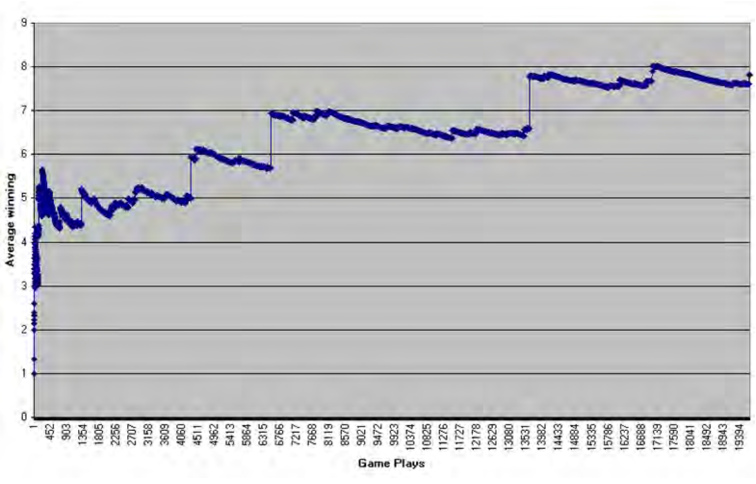
La causa d'aquest infinit és que els valors de premis molt grans es donen amb una probabilitat no suficientment petita, és a dir, com ja hem comentat abans, el comportament asimptòtic de la llei.

De l'extensió de la llei forta dels grans nombres (secció 4) per a variables amb esperança infinita, hem vist que $\frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ va quasi segurament cap a infinit. Perquè el joc fos just sembla, doncs, que hauríem de pagar una quota infinita pel dret a jugar, situació ben absurda.

En la figura que acompanya aquesta secció, veiem que la mitjana dels premis obtinguts en jugar repetidament té tendència a créixer lentament, i que aquest creixement és a causa de les tirades en les quals la cara surt molt tard, és a dir aquelles en què el premi és molt gran. Aquestes tirades són les que produeixen uns salts ben marcats en la gràfica.

Nicolas Bernoulli.

Daniel Bernoulli.




Simulació de la paradoxa de Sant Petersburg. Guanys mitjans.

D'altra banda, si paguéssim una quota $q$ fixada per jugar cada vegada, $\frac{S_n - nq}{n}$ també tendiria quasi segurament cap a infinit i, per tant, a partir d'un $n$, que depèn de la realització $\omega$, els guanys nets $S_n - nq$ serien clarament positius, i el joc seria favorable per al jugador i desfavorable per a la banca, fos quin fos el valor de $q$.

Hi ha molts estudis sobre aquesta clàssica paradoxa, alguns molt recents. La paradoxa de Sant Petersburg ha estat, doncs, un problema motivador en molts aspectes. Una referència que us recomano és l'article [33], que resumeix una conferència que J. Parrondo va fer a la Universitat Politècnica de Catalunya, en què presentà el treball de D. Bernoulli [2] com el primer on apareix una funció d'utilitat, avui tan emprada en tants camps diferents.

Cramer, el 21 de maig de 1728, en una carta a N. Bernoulli, escriu: «La paradoxa ve del fet que els matemàtics valoren el diner en proporció a la seva quantitat, i els homes de bon sentit en funció de l'ús que en poden fer.»

Cramer mateix proposa dues solucions. En la primera diu que hi ha un moment en què les quantitats són tan elevades que ja no ens satisfà guanyar més, i en concret afirma que si el premi és superior a $2^{24}$, és a dir, la primera cara surt més enllà de la tirada 24, la meva satisfacció és la mateixa que si guanyo tan sols $2^{24}$ euros. En aquestes condicions l'esperança del valor moral del premi rebut, que continuo anomenant $X$ com abans, serà

$$E(X) = \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2^2}2^2 + \frac{1}{2^3}2^3 + \cdots + \frac{1}{2^{24}}2^{24} + 2^{24}\Big[\frac{1}{2^{25}} + \frac{1}{2^{26}} + \dots\Big] = 24 + 1 = 25,$$

i afegeix que, parlant en sentit moral, aquest valor 25 sembla més raonable que $+\infty$.

Tot seguit critica el seu propi argument dient que no és cert que a partir d'una certa quantitat el plaer o valor moral es mantingui constant, sinó que el que passa és que no creix linealment, sinó més a poc a poc. Proposa agafar com a valor moral d'una quantitat la seva arrel quadrada, i fa el càlcul de l'esperança del nou valor moral, que també anomenarem $X$, i obté

$$E(X) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2^2}\sqrt{2^2} + \frac{1}{2^3}\sqrt{2^3} + \cdots = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}. \tag{5.1}$$

A continuació, amb un argument una mica obscur, diu que com que la pena per la pèrdua ha de ser igual a l'esperança moral de la satisfacció dels guanys, agafa com a quota el quadrat de la quantitat (5.1), i li dóna aproximadament $5,82$, que és ben diferent del 25 obtingut anteriorment. Acaba la carta mostrant-se poc satisfet de la discordança, però afirmant que, així i tot, és millor que l'infinit de la paradoxa original.

He de remarcar que si llegiu la carta de Cramer, els números que hi apareixen són uns altres, ja que ell considera un joc en el qual si la cara surt a l'enèsima tirada ens retornen $2^{n-1}$ euros i no $2^n$.

D'altra banda, Daniel Bernoulli [2] en l'article de 1738 que dóna nom a la paradoxa, seguint la línia proposada per Cramer, fa la hipòtesi que l'increment d'una mesura que anomena *utilitat*, quan una fortuna $x$ creix en una quantitat $\Delta x$, és donat pel quocient $\frac{\Delta x}{x}$. Per tant, si la fortuna passa de $x_0$ a un valor més gran $x_1$, l'increment d'utilitat serà

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln \frac{x_1}{x_0}.$$

Si la fortuna inicial del jugador és $x_0$, Bernoulli considera que la quota d'entrada, que anomenem $q$, justa per al joc de Sant Petersburg, serà aquella que fa que l'esperança de l'increment d'utilitat $\Delta U$ sigui nul·la. Aquesta esperança és

$$E[\Delta U] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \Big( \frac{x_0 - q + 2^n}{x_0} \Big). \tag{5.2}$$

Imposant la condició $E[\Delta U] = 0$, troba la quota $q$ en funció de la fortuna inicial $x_0$. Si hi afegim la condició $q = x_0$, la solució es calcula fàcilment, ja que l'equació seria

$$E[\Delta U] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln 2}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln q}{2^n} = 2 \ln 2 - \ln q = 0,$$

i, per tant, $q = 4$ és la quota justa en aquesta situació. Si la fortuna inicial $x_0$ del jugador és més petita que 4, aleshores l'equació (5.2) ens diu que la quota justa ha de ser més gran que $x_0$ i, per tant, el jugador no té prou diners per a pagar-la.

Comentarem ara la contribució magnífica de Feller a l'estudi de la paradoxa. Com que pagar una quota fixa pel dret a jugar cada vegada, de manera que el joc sigui just, no té sentit, proposa que la quota sigui variable i depengui de quants jocs hem jugat prèviament. Designa per $e_n$ la suma de les quotes satisfetes fins al joc $n$ inclòs, és a dir la quota acumulada, i imposa la condició que

$$\frac{S_n}{e_n} \longrightarrow 1, \quad n \to \infty,$$

en el sentit de la convergència en probabilitat, on $S_n$ és la suma dels premis obtinguts en els $n$ jocs.

Feller troba que $e_n = n \log_2 n$ compleix aquesta condició. En l'article [11] ho prova d'una manera brillant com una conseqüència de la seva pròpia generalització de la llei feble dels grans nombres (teorema 4.1).

Feller, en el seu llibre [12, pàg. 260], utilitza el mètode del truncament, que ja fa servir en la demostració de la seva llei dels grans nombres per a variables sense esperança, per a una prova més directa del fet que $\frac{S_n}{n \log_2 n} \longrightarrow 1$ en probabilitat.

Una tercera prova del mateix resultat la va desenvolupar Gutt [15], el 2004, com un corol·lari de la seva extensió de la llei dels grans nombres (teorema 4.3).

# 6 Moments d'ordre més gran que 1

## 6.1 Moments d'ordre $n$

Sigui $X$ una variable aleatòria real, i $k \in \mathbb{N}$. Sabem (secció 2) que si $E[|X|^k] < \infty$, aleshores $E[X^k] < \infty$. Si això passa, direm que $X$ té *moment d'ordre* $k$ finit, i $\mu_k = E[X^k]$ s'anomena el *moment d'ordre* $k$ de $X$.

Si una variable aleatòria té moment d'ordre $k$ finit, tindrà també moments d'ordre $1, \dots, k-1$ finits, és a dir té moments finits d'ordres inferiors a $k$.

Sembla que per a calcular el moment d'ordre $k$ d'una variable hagi de ser necessari determinar la llei de $X^k$, però, gràcies al teorema de la mesura imatge, no ens cal, ja que podem escriure

$$E[|X|^k] = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \, \mathrm{d}F(x), \qquad E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, \mathrm{d}F(x),$$

on $F$ és la funció de distribució de la variable original $X$. En el cas que $X$ tingui funció de densitat, la darrera integral seria

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Un exemple de llei que té moments finits fins a l'ordre $n-1$, però no en té de superiors, és la famosa distribució $t$ de Student amb $n$ graus de llibertat. Aquesta distribució, molt utilitzada en estadística, fou introduïda per W. S. Gosset el 1908, i té per funció de densitat

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{(n\pi)^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{6.1}$$

La no existència de moments finits és sempre un problema de les cues, és a dir, del comportament de la distribució de probabilitat quan $|x| \to \infty$. El comportament asimptòtic de la densitat anterior és com el de $|x|^{-(n+1)}$, i això ens implica que podrem integrar, respecte a la densitat (6.1), $|x|$ elevat fins a l'exponent $n-1$, però ja no la potència enèsima.

La $t$ de Student amb un grau de llibertat és la distribució de Cauchy, que ja hem vist que no tenia esperança, fet que es dedueix també del darrer resultat.

Finalment, considerem el cas gaussià, en el qual el comportament asimptòtic de la densitat és donat per l'exponencial, de manera que domina qualsevol potència $|x|^k$ i, per tant, en aquest cas tindrem moments finits de tots els ordres.

## 6.2 Funció característica i funció generatriu de moments

La funció característica de la llei d'una variable aleatòria $X$ es defineix com $\varphi(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itX} F(\mathrm{d}x)$, $t \in \mathbb{R}$, és a dir, la transformada de Fourier de la llei. Aquesta funció sempre existeix i caracteritza la llei.

Un resultat conegut (vegeu Shiryaev [39, secció II.12]) ens diu que si una variable aleatòria $Y$ té moment finit d'ordre $n$, que anomenem $\mu_n$, aleshores la funció característica $\varphi_Y$ és $n$ vegades derivable i $\varphi_Y^{(k)}(0) = i^k \mu_k$, $k = 1, \dots, n$.

En el cas que la variable $Y$ tingui moments finits $\mu_n$ de tots els ordres, i $\limsup_{n\to\infty} \frac{(E(|Y|^n))^{\frac{1}{n}}}{n} = \frac{1}{R} < \infty$, aleshores, per a $|t| < R$, la funció característica es pot escriure com la sèrie

$$\varphi_Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mu_n$$

amb el conveni $\mu_0 = 1$, fet que ens implica que la llei quedarà, en aquest cas, determinada pels moments de la variable.

D'altra banda, si $X$ és una variable tal que existeix un interval $(-s_0, s_0)$, $s_0 > 0$, en el qual $E[e^{tX}] < \infty$, $t \in (-s_0, s_0)$, a la funció $M_X(t) := E[e^{tX}]$, definida en aquest interval, l'anomenem la *funció generatriu de moments* de la llei de $X$.

Si existeix la funció generatriu de moments en un entorn del zero, serà sempre infinitament derivable en el zero. A més, per a qualsevol enter positiu $k$, el moment $\mu_k$ de la llei serà finit, coincidirà amb la derivada $k$-èsima de la funció $M_X$ a l'origen, i podem escriure el desenvolupament de McLaurin següent:

$$M_X(t) = 1 + \frac{\mu_1}{1!} t + \frac{\mu_2}{2!} t^2 + \cdots . \tag{6.2}$$

No és cert, però, que si tenim moments finits de tots els ordres, la variable tingui funció generatriu de moments. En la propera secció en veurem un exemple.

## 6.3 Problema dels moments

El *problema dels moments* és una qüestió ja plantejada per Stieltjes i avui encara oberta. La primera monografia publicada per l'AMS, escrita per Shohat i Tamarkin [43], estava dedicada a aquest problema. Encara que la seva formulació és més àmplia, en el context de la teoria de la probabilitat el problema dels moments es pregunta si una successió donada de números reals pot ser la successió dels moments d'una llei, i si aquesta llei queda determinada de manera única pels seus moments.

Heyde [19], en un celebrat article, donà un exemple molt citat de dues lleis distintes, amb moments de tots els ordres finits, i tals que les dues successions de moments coincideixen. Una de les dues era la llei log-normal, que és la distribució d'una variable $X$ tal que el logaritme de $(X - a)$ té llei normal de mitjana $m$ i variància $\sigma^2$. Per tant, les distribucions log-normals constitueixen una família de lleis que depenen de tres paràmetres, $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 \geq 0$. La seva funció de densitat és

$$g(x) = \begin{cases} (\sigma(x-a)(2\pi)^{\frac{1}{2}})^{-1} e^{[-\frac{1}{2}\sigma^{-2}(\ln(x-a)-m)^2]}, & x > a, \\ 0, & x \leq a. \end{cases}$$

L'altra llei presentada per Heyde té per funció de densitat

$$f_{\epsilon,k}(x) = \begin{cases} \left(\sigma(x-a)(2\pi)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} e^{[-\frac{1}{2}\sigma^{-2}(\ln(x-a)-m)^2]}. \\ \qquad \cdot [1+\epsilon \sin[2\pi k \sigma^{-2}(\ln(x-a)-m)]], & x > a, \\ 0, & x \leq a, \end{cases}$$

on $\epsilon$ està entre 0 i 1, i $k \in \mathbb{Z}_+$.

Els moments de les dues distribucions coincideixen i valen

$$\mu_n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} \exp\left(rm + \frac{1}{2}r^2\sigma^2\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Si $a = 0$, la suma anterior es redueix a un sol sumand, i aleshores $\mu_n = \exp\left(nm + \frac{1}{2}n^2\sigma^2\right)$.

En la secció anterior hem vist que si una variable té funció generatriu, aquesta determina la seva llei. Com que el desenvolupament de McLaurin (6.2) de la funció generatriu de moments té per coeficients els moments, la successió d'aquests determinarà en aquesta situació la llei de la variable. Això implica que les dues lleis anteriors no poden tenir funció generatriu de moments ja que són distintes però, com acabem de veure, els seus moments coincideixen. Queda manifest, en aquest exemple, que l'existència de moments de tots els ordres no implica l'existència de funció generatriu.

S'han donat moltes condicions suficients perquè la successió de moments determini la llei. Presentem en el teorema següent la condició suficient de Carleman:

TEOREMA 6.1. *Si la variable $X$ té moments finits de tots els ordres, que denotem per $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ i es compleix que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{2k}^{-\frac{1}{2k}} = \infty$, aleshores la llei està determinada pels seus moments.*

Destaquem, però, que encara avui no coneixem una condició necessària i suficient per al problema dels moments.

D'altra banda, els moments són molt emprats en la teoria de la probabilitat per a demostrar la convergència feble. El mètode dels moments [3, pàg. 344] es basa en el fet que si $X$ és una variable aleatòria amb una llei determinada pels seus moments, per a veure que una successió de variables $\{X_1, X_2, \ldots\}$, en la qual totes tenen moments finits de tots els ordres, convergeix en llei cap a $X$, basta comprovar que els moments van cap als moments, és a dir que

$$E[X_n^k] \longrightarrow E[X^k], \quad n \to \infty, \quad k = 1, 2, \ldots$$

## 7 Moments i cumulants

Sigui $Y$ una variable aleatòria amb funció característica $\varphi_Y(t)$. Com que $\varphi_Y(0) = 1$ i $\varphi_Y(t)$ és uniformement contínua, hi haurà un entorn del zero $\{t \colon |t| < \delta\}$ on la funció característica serà no nul·la i, per tant, podem parlar del logaritme de $\varphi_Y$ en aquest entorn, és a dir, d'una funció contínua $\psi_Y(t)$ tal que $\psi_Y(0) = 0$ i $\psi_Y(t) = \ln(\varphi_Y(t))$ (considerem sempre el valor principal del logaritme, és a dir si $z = r\exp(i\theta)$, $\ln z = \ln r + i\theta$).

Si el moment d'ordre $n$ de $Y$ és finit, la derivada enèsima de $\psi_Y(t)$ existirà i serà contínua en $\{t\colon |t| < \delta\}$. Definim aleshores el *cumulant* enèsim $\kappa_n$ de la manera següent:

$$\kappa_n = (-i)^n \psi^{(n)}(t)\,\big|_{t=0} = (-i)^n \frac{d^n}{dt^n} \ln(\varphi_Y(t))\,\big|_{t=0}.$$

De la definició de *cumulant* es dedueix immediatament que, igual com passa amb els moments, l'existència del cumulant d'ordre $n$ implica la dels cumulants d'ordre més petit.

Els cumulants varen ser introduïts per l'astrònom danès Thorvald Thiele (1838–1910). Al llistat que R. A. Fisher va fer dels grans estadístics de tots els temps, hi va incloure Thiele. Sobre les contribucions de Thiele a l'estadística i sobre la història dels cumulants podeu consultar [16] i [17].

En el cas que $Y$ tingui moments finits fins a l'ordre $n$, podrem desenvolupar per Taylor la funció característica de la manera següent:

$$\varphi_Y(t) = \sum_{j=0}^{n} \mu_j \frac{i^j t^j}{j!} + o(|t|^n),$$

i també el seu logaritme

$$\psi_Y(t) = \sum_{j=0}^{n} \kappa_j \frac{i^j t^j}{j!} + o(|t|^n),$$

on els coeficients de les dues expressions són respectivament els moments i els cumulants. Utilitzant l'expansió de Taylor de $\ln(1+z)$, comparant els dos desenvolupaments anteriors (vegeu Shiryaev [39, pàg. 288]), podem deduir la relació següent entre els moments $\mu_j, 1 \le j \le n$, i els cumulants fins a l'ordre $n$:

$$\mu_j = j! \sum_{m=1}^{j} \sum \frac{\kappa_1^{r_1}}{(1!)^{r_1} r_1!} \cdots \frac{\kappa_m^{r_m}}{(m!)^{r_m} r_m!}, \quad j \le n,$$

on el segon sumand és sobre tots els enters no negatius $r_1, \dots, r_m$ tals que $\sum_{j=1}^{m} k r_k = j$.

Una manera potser més clara d'expressar aquesta relació entre moments i cumulants és

$$\mu_n = \sum_{\pi=\{b_1,\dots,b_j\}\in\mathcal{P}(n)} \prod_{i=1}^{j} \kappa_{|b_i|}, \tag{7.1}$$

on $\mathcal{P}(n)$ indica el conjunt de les particions de $\{1, 2, \dots, n\}$, i $|b_i|$ el nombre d'elements del bloc $b_i$ en la partició $\pi = \{b_1, \dots, b_j\} \in \mathcal{P}(n)$.

Per tant, els moments $\mu_n$, $n \geq 1$, els podem escriure com un polinomi en $\kappa_1, \dots, \kappa_n$. Per exemple, els primers polinomis que passen de cumulants a moments seran

$$\mu_1 = \kappa_1, \quad \mu_2 = \kappa_1^2 + \kappa_2, \quad \mu_3 = \kappa_1^3 + 3\kappa_1\kappa_2 + \kappa_3, \quad \dots$$

Fixem-nos que el primer cumulant és l'esperança, i el segon cumulant serà $\mu_2 - (\mu_1)^2$, és a dir, la variància, en el cas que la variable en tingui.

Aquests polinomis que relacionen els cumulants amb els moments s'anomenen *polinomis de Bell*. Els denotarem per $\Gamma_n(x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 1$. Aleshores,

$$\mu_n = \Gamma_n(\kappa_1, \dots, \kappa_n),$$

i per conveni $\Gamma_0 = 1$.

Una propietat interessant dels cumulants és que si $X$ i $Y$ són variables aleatòries independents amb moments d'ordre $n$ finits, el cumulant enèsim de la suma $X + Y$ és la suma dels cumulants enèsims respectius.

Donarem ara alguns exemples dels valors dels cumulants per a distintes lleis. Si $X$ té llei $N(0, 1)$, els seus moments valen $\mu_{2n-1} = 0$, i $\mu_{2n} = 1 \times 3 \cdots \times (2n-1) = (2n-1)!!$, $n \geq 1$, i els seus cumulants seran $\kappa_1 = 0, \kappa_2 = 1$, i a partir d'aquí tots els cumulants d'ordre superior són nuls.

Un altre exemple divertit és el d'una variable $X$ amb llei de Poisson de paràmetre 1. Els seus moments són la successió de números de Bell, i tots els cumulants són constants i iguals a 1. Recordeu que els números de Bell $B_n, n \geq 1$, indiquen el nombre de possibles particions del conjunt $\{1, 2, \dots, n\}$ i, per la relació que hem explicat entre cumulants i moments, $B_n$ serà el valor del polinomi de Bell enèsim calculat en $(1, \dots, 1)$, és a dir $\Gamma_n(1, \dots, 1)$. Aquests números de Bell satisfan la relació de recurrència

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \quad n \geq 0,$$

amb la convenció que $B_0 = 1$.

Donem a continuació unes propietats interessants dels polinomis de Bell.

1. Els polinomis $\Gamma_n, n \geq 1$, satisfan la fórmula de recurrència següent:

$$\Gamma_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Gamma_j(x_1, \dots, x_j)\, x_{n+1-j}. \tag{7.2}$$

2. Les derivades parcials d'aquests polinomis són

$$\frac{\partial \Gamma_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} = \binom{n}{j} \Gamma_{n-j}(x_1, \dots, x_{n-j}), \quad j = 1, \dots, n.$$

3. $\Gamma_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Gamma_{n-j}(0, x_2, \dots, x_{n-j})\, x_1^j.$

Aquesta fórmula aplicada a $\kappa_1, \dots, \kappa_n$, tenint en compte que $Y$ i $Y - E(Y)$ tenen els mateixos cumulants $\kappa_n$ per a $n \geq 2$, mentre que el seus primers cumulants són respectivament $E(Y)$ i zero, ens donarà l'expressió clàssica dels moments no centrats $\mu_n = E(Y^n)$ a partir dels moments centrats $E\big[\big(Y - E(Y)\big)^{n-j}\big]$, $j = 0, \dots, n$, i les potències de $E(Y)$.

Només una remarca per a assenyalar que en el món de les probabilitas lliures, és a dir en un escenari no commutatiu, la relació entre cumulants i moments és donada per una altra família de polinomis, distinta de la de Bell, que tenen la mateixa expressió (7.1) que en el cas clàssic, però que canvien les particions de $\{1, 2, \dots, n\}$ per les particions *non-crossing*.

Una partició d'un conjunt ordenat s'anomena *crossing* si existeixen quatre elements $p_1 < q_1 < p_2 < q_2$ tals que $p_1$ i $p_2$ estan al mateix bloc de la partició i $q_1$ i $q_2$ estan tots dos en un altre bloc diferent. Una partició *non-crossing* serà una partició que no satisfà la definició anterior. Per exemple, si considerem el conjunt $\{1, 2, 3, 4\}$, la partició $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ serà *non-crossing* i la $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ serà *crossing.*

En aquest escenari, doncs, la relació entre moments lliures i cumulants lliures serà donada per l'expressió

$$\mu_n = \sum_{\pi = \{b_1, \dots, b_j\} \in NC(n)} \prod_{i=1}^{j} \kappa_{|b_i|}(X), \tag{7.3}$$

que és similar a la (7.1), però ara la suma és sobre les particions *non-crossing* de $\{1, 2, \dots, n\}$ i, com abans, $|b_i|$ indica la mida del bloc $b_i$ en la partició *non-crossing* $\pi = \{b_1, \dots, b_j\} \in NC(n)$.

Si $n \leq 3$, totes les possibles particions seran *non-crossing* i, per tant, fins aquest ordre aquests nous polinomis coincidiran amb els polinomis de Bell.

En aquest marc lliure, una distribució que té els mateixos cumulants que una $N(0, 1)$ clàssica, és a dir tots valen zero excepte el segon cumulant que és 1, tindrà tots els moments d'ordre senar nuls, ja que perquè els sumands de (7.3) siguin diferents de zero, tots els blocs de la partició *non-crossing* han de tenir exactament dos elements, i això és impossible si estem fent particions de conjunts amb una cardinalitat senar. D'altra banda, els moments d'ordre parell valdran

$$\mu_{2n} = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

on $C_n$ és l'enèsim número de Catalan. Els primers números de Catalan són 1, 1, 2, 5, 14, 132, etc.

Recordem que el número de Catalan $C_n$ ens indica el nombre de particions *non-crossing* del conjunt $\{1, 2, \dots, n\}$, i és igual al nombre de particions *non-crossing* del conjunt $\{1, 2, \dots, 2n\}$ que tenen tots els blocs de mida dos. Foren introduïts pel matemàtic belga Eugene Charles Catalan (1814–1894), que fou professor de l'Escola Politècnica de París i de la Universitat de Lieja.

E. C. Catalan.

T. Thiele.

La llei determinada per aquests moments ($\mu_{2n} = C_n$, $\mu_{2n+1} = 0$) és la distribució semicircular, que té per funció de densitat

$$f(x) = (2\pi)^{-1}\sqrt{4-x^2}\,\mathbf{1}_{\{|x|<2\}}\,.$$

Aquesta llei semicircular tindrà, en el món de les probabilitats lliures, el paper central que la normal té en les probabilitats clàssiques.

Finalment, en aquest escenari lliure, una llei que tingui tots els cumulants igual a 1, que com hem vist en el marc usual seria una Poisson de paràmetre 1, s'anomenarà una Poisson lliure (*free Poisson*). Aplicant (7.3) veiem que el seu moment d'ordre $n$ és el nombre de particions *non-crossing* del conjunt $\{1, 2, \dots, n\}$, és a dir tenim els números de Catalan,

$$\mu_n = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad n \geq 1\,.$$

La funció de densitat de la llei determinada per aquests moments és

$$f(x) = (2\pi x)^{-1}\sqrt{x(-x+4)}\,\mathbf{1}_{\{x\in(0,4)\}},$$

(vegeu [30, teorema 12.11]).

És curiós remarcar que aquesta Poisson lliure correspon a la distribució d'una variable obtinguda elevant al quadrat una variable amb llei semicircular i restant-li 1. Per tant, és l'anàleg lliure a la llei $\chi^2$ clàssica centrada amb 1 grau de llibertat.

Sobre el tema de les probabilitats lliures us recomano el llibre de Nica i Speicher [30] i una part del *preprint* de Nourdin i Peccati [31].

# 8 Lleis estables

## 8.1 El matemàtic Paul Lévy

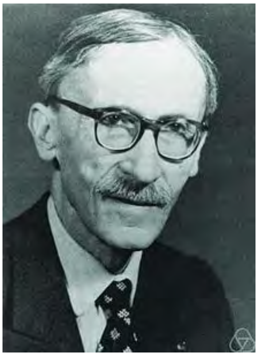
Les distribucions estables varen ser introduïdes i estudiades pel gran probabilista francès Paul Lévy (1886–1971), el qual també ha donat nom als processos de Lévy, que presentarem en una propera secció.

Lévy estudià a l'Escola Politècnica de París, i després en fou professor tota la seva vida. Inicià la seva carrera investigadora molt jove com a analista, i publicà el seu primer article als dinou anys. S'interessà per les probabilitats el 1919 per atzar (com correspon en aquest tema, oi?) quan li encarregaren impartir-ne un curs. Com diu Jacod [21] en la presentació de la subcol·lecció de *Lecture Notes in Mathematics* dedicada als processos de Lévy, aquest fou l'inici d'una extraordinària sèrie de contribucions a la teoria dels processos estocàstics i la probabilitat, encara que sempre continuà la seva activitat com a analista.

Entre el conjunt dels seus resultats, Jacod [21] destaca que introduí una manera nova de considerar els processos, atenent les seves propietats trajectorials, i també, sobretot, la seva anàlisi profunda del moviment brownià.

El primer número de la revista *Annals of Probability* (1973), que aparegué dos anys després de la seva mort, es va dedicar a la seva memòria. A les primeres pàgines es va publicar una semblança biogràfica interessant, escrita per Loève [26].

Malgrat tots aquests reconeixements tardans, recordem que una part de la seva vida acadèmica fou simultània amb el moviment bourbakista, que dominava la matemàtica francesa de l'època. Ell, però, com Doob recorda, no era un formalista, i sempre seguia camins independents. Aquest fet, juntament amb la prevenció que encara hi havia en els ambients matemàtics pel que fa a la teoria de la probabilitat, provocà que en el moment de la seva publicació, les seves idees no despertessin a França l'atenció que mereixien. P. A. Meyer escriu: «A pesar del seu títol de professor, de ser elegit membre de l'Acadèmia de Ciències, Paul Lévy ha estat marginat a França. La seva obra era considerada amb condescendència i s'escoltava sovint que no era un matemàtic.»



P. Lévy.

P. A. Meyer.

## 8.2 Distribucions estables i distribucions infinitament divisibles

Direm que una variable aleatòria $X$ té una *distribució estable* si, per a qualsevol $n \geq 2$, la suma $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ de $n$ còpies independents de $X$ té la mateixa distribució que una transformació afí de la variable $X$. Ara ho definirem amb precisió:

Definició 8.1. Direm que la llei d'una variable aleatòria $X$ és estable en sentit ampli si per a tota successió $X_1, X_2, \ldots$ de variables i. i. d., totes amb la mateixa llei que la d'una variable $X$, i amb sumes parcials $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n \geq 1$, existeixen unes constants $c_n > 0$ i $d_n \in \mathbb{R}, n \geq 1$, tals que tenim la igualtat entre lleis següent:

$$\mathcal{L}(S_n) = \mathcal{L}(c_n X + d_n).$$

Si per a qualsevol $n$, $d_n = 0$, direm que la llei és estrictament estable.

Un exemple de llei estable és la gaussiana, ja que si $X$ és una variable $N(\mu, \sigma^2)$, aleshores la suma de $n$ còpies independents té llei $N(n\mu, n\sigma^2)$ i, per tant, la mateixa distribució que $\sqrt{n}X + (n - \sqrt{n})\mu$, és a dir, la d'una transformació afí de X amb $c_n = \sqrt{n}$ i $d_n = (n - \sqrt{n})\mu$. Si l'esperança de la normal fos nul·la, l'estabilitat de la llei seria en sentit estricte.

Sembla que Paul Lévy, el 1919, va assistir a un seminari on el conferenciant va dir que l'única distribució estable era la gaussiana. Pensant-ho posteriorment va veure que no era cert i d'aquesta manera va començar la teoria de les lleis estables. Lévy ja en va parlar el 1925, en el seu curs sobre Probabilitats [23], i hi va aprofundir en el celebrat llibre *Théorie de l'addition des variables aléatories* [24], publicat el 1937.

Es demostra [13, pàg. 206] que donada una distribució estable no degenerada existeix una constant $\alpha \in (0, 2]$, tal que la $c_n$ de la transformació afí és proporcional a $n^{\frac{1}{\alpha}}$. Aquest paràmetre $\alpha$ s'anomena l'*índex d'estabilitat*. D'ara endavant, a una llei estable amb un índex d'estabilitat $\alpha$ l'anomenarem $\alpha$-estable.

En el cas de la gaussiana hem vist que $c_n = \sqrt{n}$ i, per tant, $\alpha = 2$. La gaussiana serà, doncs, una llei 2-estable. També podem provar el recíproc: si una llei és 2-estable aleshores és forçosament una gaussiana (vegeu Sato [38, teorema 14.1]).

Un celebrat teorema [38, pàg. 86] ens dóna la funció característica de les lleis estables amb $0 < \alpha < 2$. (Recordem que la funció característica de la llei d'una variable aleatòria $X$ es defineix com $\varphi(t) = E(e^{itX})$ i que caracteritza la llei.)

Teorema 8.2. *Sigui $\alpha \in (0, 2)$, i $P$ una llei no degenerada $\alpha$-estable. La seva funció característica és*

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp[-\sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} sgn(t)) + i\tau t], & \alpha \neq 1, \\ \exp[-\sigma |t| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} (sgn(t)) \ln(|t|)) + i\tau t], & \alpha = 1, \end{cases}$$

*amb $\sigma > 0, \beta \in [-1, +1]$, i $\tau \in \mathbb{R}$. Aquests tres paràmetres estan determinats per la llei. Recíprocament, donats $\sigma$, $\beta$ i $\tau$ hi ha una llei $\alpha$-estable no degenerada que té una funció característica del tipus indicat.*

Segons aquest teorema podem dir que una llei $\alpha$-estable està caracteritzada de manera única per la tripleta

$$(\sigma, \beta, \tau), \text{ amb } \sigma > 0, \ \beta \in [-1, +1], \ \tau \in \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

Si $\beta = 0$, les funcions característiques del teorema anterior tenen la forma

$$\varphi(t) = \exp[-\sigma^{\alpha}|t|^{\alpha} + i\tau t]. \tag{8.2}$$

Com que a la suma de variables independents li correspon una funció característica que és el producte de les funcions característiques dels sumands, si $\beta = 0$ la llei $\alpha$-estable serà la d'una variable suma d'una constant $\tau$ més una amb llei simètrica respecte a l'origen, ja que sabem que si la funció característica és una funció a valors reals, aleshores determina una distribució simètrica.

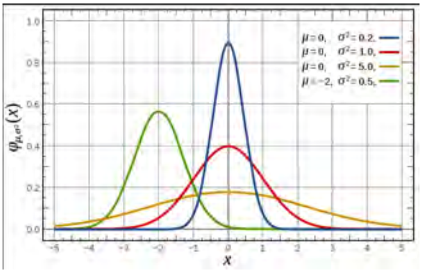
El paràmetre $\beta$ el podem interpretar, doncs, com un paràmetre de simetria. D'altra banda, la $\sigma$ s'interpreta com un paràmetre d'escala, la $\tau$ de difusió, i la $\alpha$ de forma.

Com que les funcions característiques anteriors són integrables, aleshores podem dir que les lleis tenen densitat $f(x)$, la qual podem trobar amb la fórmula d'inversió següent:

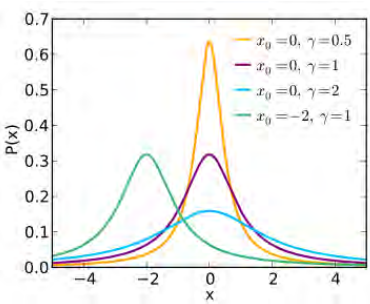
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{8.3}$$

Tan sols en tres casos tenim expressions tancades per a la densitat, que mostrem en el quadre següent, on la parametrització per a la llei normal no és la usual. En els altres casos les densitats s'expressen com a sumes infinites.

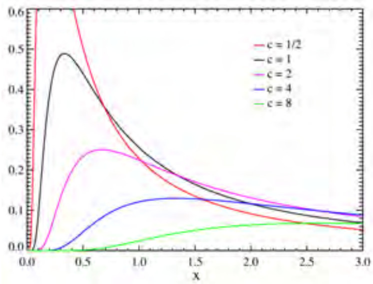
| *Llei* | $\alpha$ | $\beta$ | *Densitat* |
|---|---|---|---|
| Gaussiana | $\alpha = 2$ | $\beta = 0$ | $\frac{1}{2\sigma\pi^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4\sigma^2}}$ |
| Cauchy | $\alpha = 1$ | $\beta = 0$ | $\frac{\sigma}{\pi((x-\mu)^2+\sigma^2)}$ |
| Lévy | $\alpha = \frac{1}{2}$ | $\beta = 1$ | $\left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(x-\mu)^{\frac{3}{2}}}\exp\left[-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right]\mathbf{1}_{\{x>\mu\}}$ |



Densitat normal.




Densitat de Cauchy.




Densitat de Lévy ($\sigma = c$).

Una família de lleis que conté les estables és la de les *infinitament divisibles*. Varen ser introduïdes per Lévy posteriorment a les estables, i la teoria fou desenvolupada pels treballs de Khintchine i el mateix Lévy. La seva definició és la següent:

DEFINICIÓ 8.3. La llei d'una variable $X$ és infinitament divisible si, per a qualsevol $n \geq 1$, existeixen $n$ variables i. i. d. (amb la llei adequada) de manera que
$$\mathcal{L}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathcal{L}(X).$$

Com a exemples de lleis infinitament divisibles presentem aquesta llarga llista: gaussiana, Cauchy, Poisson, geomètrica, binomial negativa, exponencial, Pareto...

El teorema de Lévy-Khintchine [38, pàg. 37] ens dóna l'expressió de la funció característica d'una llei infinitament divisible. Va ser obtingut el 1930 per De Finetti i Kolmogorov en alguns casos especials, i per Lévy en el cas general. Finalment, Khintchine el 1937 en va fer una prova analítica.

TEOREMA 8.4. *Si $P$ és una llei infinitament divisible, aleshores la seva funció característica té la forma*
$$\varphi(t) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 t + i\gamma t + \int_{\mathbb{R}} (e^{itx} - 1 - itx\mathbf{1}_{[-1,+1]}(x))\, \nu(\mathrm{d}x)\right], \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8.4}$$
*on $\sigma^2 \geq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, i $\nu$ és una mesura en $\mathbb{R}$ que satisfà les condicions*
$$\nu(\{0\}) = 0, \qquad \int_{\mathbb{R}} (|x|^2 \wedge 1)\, \nu(\mathrm{d}x) < \infty. \tag{8.5}$$
*Recíprocament, fixats $(\sigma^2, \nu, \gamma)$, existeix una llei infinitament divisible $P$ amb la funció característica de la forma (8.4).*

El teorema anterior ens diu que podem determinar la llei infinitament divisible amb la tripleta $(\sigma^2, \nu, \gamma)$. En la literatura hi ha, però, diverses maneres de definir la tripleta (llegiu els comentaris del magnífic llibre de Sato [38, pàg. 38]).

La mesura $\nu$ s'anomena la *mesura de Lévy* i té un paper fonamental en la teoria. Ara la determinarem per a algunes lleis, comparant la seva funció característica amb l'expressió (8.4), donada pel teorema de Lévy-Khintchine.

En el cas d'una distribució gaussiana, la mesura de Lévy és nul·la, ja que la funció característica d'una $N(\mu, \sigma^2)$ és

$$\varphi(t) = \exp\Big[ -\frac{1}{2}\sigma^2 t + i\gamma t\Big], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Per a una Poisson de paràmetre $\lambda$, la mesura de Lévy serà $\nu(\mathrm{d}x) = \lambda\delta_1(\mathrm{d}x)$, on $\delta_1(\mathrm{d}x)$ és la mesura de Dirac en 1, ja que la seva funció característica és

$$\varphi(t) = \exp[\lambda(e^{it} - 1)],$$

i, per tant, la tripleta associada serà $(0, \lambda\delta_1, \lambda)$.

La mesura de Lévy d'una distribució $\alpha$-estable, per a $\alpha$ a l'interval $(0, 2)$, és

$$\nu(\mathrm{d}x) = \begin{cases} c_1 \frac{1}{x^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}x, & x \in (0, \infty), \\ c_2 \frac{1}{|x|^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}x, & x \in (-\infty, 0)\,. \end{cases} \tag{8.6}$$

(Vegeu [38, pàg. 80].)

## 8.3 Certs possibles límits en distribució tan sols poden ser lleis estables

Tots coneixeu el teorema central del límit, el qual ens explica la importància de la llei normal. Bàsicament afirma que si tenim una successió de variables i. i. d. $\{X_1, X_2, \ldots\}$, amb esperança $\mu$ i variància $\sigma^2$, les sumes $S_n$ de les $n$ primeres variables de la successió, convenientment normalitzades, convergeixen en llei cap a una variable $N(0, 1)$. Concretament

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \longrightarrow N(0, 1), \quad n \to \infty\,. \tag{8.7}$$

Recordem que la convergència en llei equival a la convergència puntual de les funcions de distribució de les variables de la successió cap a la funció de distribució del límit en els punts de continuïtat d'aquesta darrera. Com que per a un límit gaussià la funció de distribució és contínua, la convergència puntual de les funcions de distribució corresponents a (8.7) s'ha de satisfer per a tot $x \in \mathbb{R}$.

Una qüestió que apareix immediatament és preguntar-se com han de ser les lleis límit de transformacions del tipus $\frac{S_n - b_n}{a_n}$, on $n \geq 1$, $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$, i $\{X_1, X_2, \ldots\}$ és una successió i. i. d.. La resposta sorprenent és que els possibles límits són les lleis estables descrites en la secció anterior.

Tot seguit es plantejà la pregunta de quines són les distribucions tals que en agafar successions i. i. d. $\{X_1, X_2, \ldots\}$ que la tenen com a llei comuna, existeixen transformacions de les sumes parcials del tipus $\frac{S_n - b_n}{a_n}$, que convergeixen en llei cap a una distribució estable determinada. Aquesta qüestió portà a la definició del concepte de *domini d'atracció* següent:

Definició 8.5. Diem que una variable $X$ és del domini d'atracció d'una llei estable determinada si donada una successió i. i. d. amb llei comuna a la de $X$, podem trobar una successió $\{a_n\}_{n\geq 1}$ de números positius, i una altra $\{b_n\}_{n\geq 1}$, de manera que les sumes transformades $\frac{S_n - b_n}{a_n}$ convergeixen en llei cap a la distribució estable fixada.

El tema dels dominis d'atracció va ser iniciat per Doeblin el 1937, i ha esdevingut un clàssic en la teoria de la probabilitat.

En el cas que trobem diverses transformacions de les mateixes sumes parcials que convergeixen cap a lleis diferents, ens preguntem també quina serà la relació entre aquestes, és a dir, si canviant les constants normalitzadores obtindrem coses molt distintes.

La resposta la dóna el teorema dels Tipus [36, pàg. 275], el qual diu que si per a la mateixa successió $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$ tenim dues transformacions distintes que convergeixen en llei cap a dues variables $U$ i $V$ no degenerades, és a dir

$$\frac{Y_n - b_n}{a_n} \longrightarrow U, \quad \frac{Y_n - \beta_n}{\alpha_n} \longrightarrow V, \tag{8.8}$$

aleshores existeixen unes constants $A > 0$, i $B \in \mathbb{R}$ tals que

$$\frac{\alpha_n}{a_n} \longrightarrow A, \quad \frac{\beta_n - b_n}{a_n} \longrightarrow B, \tag{8.9}$$

i $V$ té la mateixa llei que $\frac{U-B}{A}$.

Recíprocament, si tenim (8.9), aleshores cada una de les convergències en llei de (8.8) implica l'altra, i la relació entre la distribució de $U$ i la de $V$ és la que acabem d'explicar.

Com a exemple d'aplicació d'aquest teorema, considerem una variable $X$ amb moment de segon ordre finit, és a dir amb variància finita. Aleshores, pel teorema central del límit, la seva llei pertany al domini d'atracció d'una normal i qualsevol altra transformació de les sumes parcials que convergeixi en llei, pel teorema dels Tipus, ho farà cap a una transformació afí d'una normal estàndard. Per tant, les lleis amb variància finita tan sols poden ser del domini d'atracció de les normals.

El domini d'atracció de la normal conté, però, també lleis sense variància. El teorema següent (vegeu Breiman [4, pàg. 215]) ens el caracteritza:

Teorema 8.6. *Una variable $X$ és del domini d'atracció d'una normal si i només si*

$$\frac{x^2 P[|X| > x]}{E[X^2 \mathbf{1}_{\{|X| \leq x\}}]} \longrightarrow 0, \quad x \to +\infty. \tag{8.10}$$

Aquesta condició (8.10) sempre es compleix si la variable té moment de segon ordre finit, però també es pot complir encara que no sigui finit (Breiman [4] proposa com a problema trobar una distribució amb aquesta propietat). Noteu que el denominador de (8.10) sempre és finit ja que hem truncat la variable.

També a [4] hi trobareu un teorema interessant que ens caracteritza el domini d'atracció de les lleis estables de paràmetre $\alpha \in (0,2)$, en termes de condicions sobre les cues de les lleis. Aquestes lleis, com veurem en la propera secció, no tenen moment de segon ordre finit.

Per aprofundir en aquestes qüestions podeu consultar Breiman [4, capítol 9] o Sato [38].

## 8.4 Sobre els moments de les lleis infinitament divisibles

Com hem vist a la darrera secció, les lleis infinitament divisibles (ID) formen una família més àmplia que les lleis estables. Hi ha un resultat preciós que relaciona l'existència de moments finits d'una llei ID amb la dels moments de la seva mesura de Lévy $\nu$. Encara que la mesura de Lévy no cal que sigui una probabilitat, li podem aplicar les mateixes definicions pels seus moments d'ordre $k$ que les explicades abans per a les lleis de les variables aleatòries. Per tant, direm que $\nu$ té un moment d'ordre $n$ finit, que anomenem $m_n$, si i només si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^n \, \nu(\mathrm{d}x) < \infty,$$

i en aquest cas $m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, \nu(\mathrm{d}x)$.

Per les propietats de la mesura de Lévy, ja no serà cert, com ho era en el cas d'una probabilitat, que si $\nu$ té moment finit d'ordre 2, també en tindrà d'ordre 1. Recordem que $\nu$ satisfà la condició (8.5)

$$\int_{\mathbb{R}} (|x|^2 \wedge 1) \, \nu(\mathrm{d}x) < \infty,$$

per tant, si dividim $\mathbb{R}$ en dos subconjunts, $[-1,+1]$ i $[-1,+1]^c$, tenim que $|x|^k, k \geq 2$, sempre és integrable respecte a la mesura de Lévy en el primer conjunt, però $|x|$ no té per què ser-ho. L'existència de moment finit d'ordre $k$, per a $k > 2$, de la mesura de Lévy ens assegura la dels moments d'ordre $2, \dots, k-1$, però no la del moment d'ordre 1 respecte a $\nu$.

El teorema següent és una adaptació simplificada de [38, teorema 25.3]. Ens relaciona els moments d'una variable amb llei infinitament divisible amb els moments de la seva mesura de Lévy:

TEOREMA 8.7. *Sigui $X$ una variable aleatòria amb llei infinitament divisible amb mesura de Lévy $\nu$. Aleshores:*

- *Per a qualsevol $k \geq 2$, $X$ té moment d'ordre $k$ finit si i només si $\nu$ també en té.*
- *La variable $X$ té esperança finita si i només si $\int_{[-1,+1]^c} |x| \, \nu(\mathrm{d}x) < \infty$.*

Aplicarem ara aquest teorema a diferents situacions.

En el cas que $X$ tingui una llei de Poisson de paràmetre $\lambda$, a la qual, com ja hem comentat, li correspon una mesura de Lévy $\nu = \lambda\delta_1$, com que aquesta mesura té moments de tots els ordres finits, tots iguals a $\lambda$, pel teorema anterior la variable també tindrà moments finits de tots els ordres, fet que, evidentment, ja coneixíem sense necessitat de passar per la mesura de Lévy.

Un altre exemple seria el donat per una llei Gamma amb mitjana 1 i paràmetre d'escala 1, que és una distribució infinitament divisible. La seva mesura de Lévy, determinada per la fórmula de Lévy-Khintchine (8.4), és

$$\nu(\mathrm{d}x) = \frac{e^{-x}}{x}\,\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

i, per tant, $\nu(\mathbb{R}) = \infty$.

Els moments de la mesura de Lévy anterior seran tots finits ja que

$$m_n = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = (n-1)!,\ \ n \geq 1,$$

i, pel teorema 8.7, la llei tindrà també moments finits de tots els ordres, com sabem que passa per una llei Gamma.

Finalment, considerem la llei infinitament divisible caracteritzada per la tripleta $(0, \nu, 0)$, on la mesura de Lévy $\nu$ val

$$\nu(\mathrm{d}x) = \frac{e^{-x}}{x^2}\,\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\,\mathrm{d}x,$$

aleshores $\nu(\mathbb{R}) = \infty$, i $m_1 = \infty$, però

$$\int_{|x|>1} |x|\,\nu(\mathrm{d}x) = \int_1^\infty \frac{1}{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x < \infty,$$

per tant, aplicant el teorema (8.7), deduïm que existirà l'esperança de la llei.

Noteu que en aquest cas també $m_n < \infty$, $n \geq 2$. El teorema ens implica que la variable aleatòria tindrà moments finits de tots els ordres $n \geq 2$ i, per tant, tindrà esperança finita. No calia, doncs, haver passat pel raonament anterior, el qual hem explicitat per mostrar el comportament diferent de l'esperança i dels moments d'ordre superior en la seva relació amb els moments corresponents de la mesura de Lévy.

Si $X$ té una llei $\alpha$-estable, amb $0 < \alpha < 2$, la seva mesura de Lévy és la indicada en (8.6). Per tant, pel teorema anterior, $X$ té esperança finita tan sols si $\alpha > 1$, i no tindrà moment de segon ordre finit.

Si $\alpha = 2$, aleshores $\nu = 0$ i, per tant, aplicant el teorema 8.7, veiem que $X$ tindrà moments finits de tots els ordres, resultat que és també clar si pensem que, en aquesta situació, la llei és una gaussiana.

Finalment, és interessant d'assenyalar que les lleis que pertanyen al domini d'atracció d'una distribució $\alpha$-estable fixada, amb $\alpha \in (0, 2)$, comparteixen la propietat d'aquesta de tenir moments finits tan sols fins als ordres estrictament més petits que $\alpha$.

## 9 Processos de Lévy

En aquest escrit, un *procés estocàstic* $\mathbf{X} = \{X_t, t \geq 0\}$ serà una col·lecció de variables aleatòries reals, parametritzades pel temps, totes definides en el mateix espai de probabilitat. Resultarà, per tant, un model apropiat per a descriure l'evolució de la incertesa en el temps.

Fixat $\omega \in \Omega$, a la funció $X_\cdot(\omega)\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, definida com

$$t \longmapsto X_t(\omega),$$

l'anomenem una *trajectòria del procés* $\mathbf{X}$.

Definim a continuació un tipus particular de procés, l'anomenat *procés de Lévy*, al qual dedicarem tota la resta de l'article:

Definició 9.1. Direm que un procés $\mathbf{X} = \{X_t, t \geq 0\}$ és un procés de Lévy si satisfà les condicions següents:

- $X_0 = 0$ quasi segurament, és a dir existeix un esdeveniment $N$ amb $P[N] = 1$ tal que, si $\omega \in N$, aleshores $X_0(\omega) = 0$.
- $X$ té increments independents i estacionaris, és a dir per a tot $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n, n \geq 1$, els increments $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ són independents i la llei d'un increment tan sols depèn de la diferència entre els temps.
- $X$ és continu en probabilitat, és a dir per a $t \geq 0$ i $\epsilon > 0$, es compleix que $P[|X_t - X_s| > \epsilon] \longrightarrow 0$, quan $s \to t$.

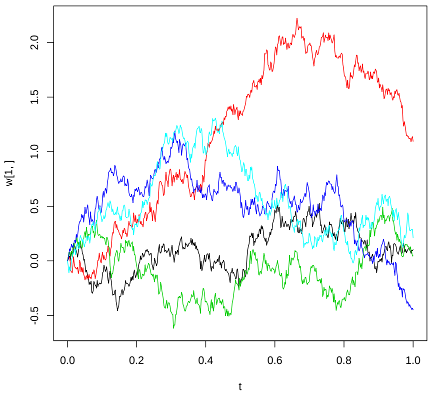
Els processos de Lévy s'introdueixen per primera vegada en els llibres escrits per Lévy [24, 25], publicats el 1937 i el 1948 respectivament. Evidentment, ell no utilitzava aquest nom sinó el de *processos additius*. Avui dia, però, quan es parla d'un *procés additiu* es fa referència a un procés que té totes les propietats indicades en la definició anterior excepte l'homogeneïtat dels increments.

Referències excel·lents sobre processos de Lévy són el llibre de Sato [38], el qual ja hem citat moltes vegades en aquest escrit i, amb un altre estil, el llibre d'Applebaum [1].

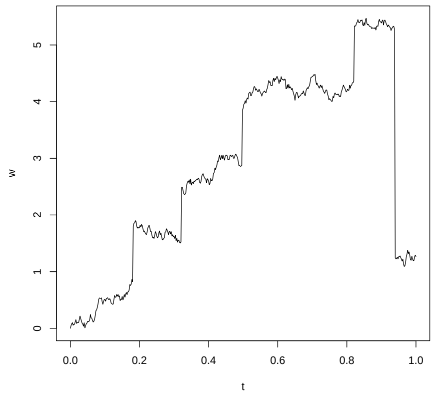
Aquests processos són l'extensió a temps continu de les marxes aleatòries i, com diu Applebaum a [1], constitueixen una subclasse dels processos que són semimartingales, i també dels que són Markov. Per a aquesta subclasse, l'anàlisi és més simple i ens dóna una forta intuïció per a l'estudi del cas general.

Qualsevol procés de Lévy té una modificació amb trajectòries *cadlag* (*cadlag* és l'abreviació de «contínues per la dreta i amb límit per l'esquerra», en francès, la qual ha esdevingut una paraula usual a la literatura de processos). Nosaltres treballarem amb aquesta versió i, per tant, les discontinuïtats, si hi són, seran sempre de salt. Un resultat d'anàlisi ens diu que una funció cadlag amb domini compacte té un nombre finit, que pot ser zero, o numerable de discontinuïtats i, com a conseqüència, amb probabilitat 1, per a $T > 0$, les trajectòries del procés amb domini $[0, T]$ presentaran com a màxim una infinitat numerable de temps de salt.

El procés de Wiener, $\{W_t, t \geq 0\}$, anomenat també *moviment brownià*, i el procés de Poisson, $\{N_t, t \geq 0\}$, són els dos exemples fonamentals de processos de Lévy. El brownià té trajectòries contínues, encara que no derivables, i és un procés amb lleis conjuntes gaussianes. El segon presenta trajectòries amb discontinuïtats, tots els salts tenen mida 1, i entre salt i salt tenen valor constant. Els temps entre les discontinuïtats consecutives són variables independents amb llei exponencial.




Trajectòries brownianes.




Trajectòria d'un Poisson compost.

En un procés de Poisson, denotem el temps del primer salt per $T_1$, el del segon per $T_2$, i així successivament. Per a $t \geq 0$, podem definir $N_t$, la variable del procés en el temps $t$, com

$$\max\{i : T_i \leq t\},$$

és a dir el nombre de salts efectuats fins al temps $t$.

La variable $N_t$ tindrà una llei de Poisson amb paràmetre $\lambda t$, $\lambda > 0$, i d'aquí el nom del procés. La constant $\lambda$, que no depèn del temps, és el paràmetre del procés i ens dóna una idea de la densitat dels salts, ja que $E(N_t) = \lambda t$. Un bon llibre de referència sobre el procés de Poisson és Kingman [22].

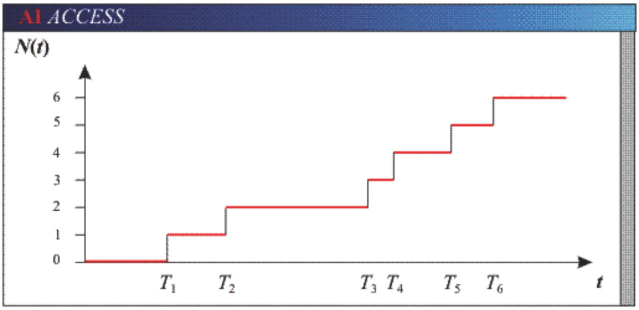
Si els valors dels salts del procés clàssic de Poisson, tots com hem dit de mida 1, els canviem pels valors donats per una successió $Y_1, Y_2, \ldots$ de variables i. i. d., i independents del Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$, de manera que el subíndex ens indiqui quin és el salt que estem considerant, el procés obtingut serà

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \geq 0,$$

on hem emprat el conveni que si $N_t$ és zero, aleshores $X_t = 0$. Aquest procés rep el nom de *procés de Poisson compost*.

Fixat $T > 0$, tant en el procés de Poisson simple com en el compost, el nombre de salts que es produeixen en l'interval de temps $[0, T]$ és finit amb probabilitat 1.

S. D. Poisson.




La trajectòria d'un procés de Poisson.

Una propietat fonamental dels processos de Lévy és que per a qualsevol temps $t > 0$, la llei de la variable $X_t$ és infinitament divisible (definició 8.3). Aquest fet explica l'íntima relació entre aquests processos i la teoria de les lleis ID. Pel teorema de Lévy-Khintchine, la llei de $X_t$ estarà caracteritzada per una tripleta $(\sigma_t^2, \nu_t, \gamma_t)$. Un fet molt agradable és que la funció característica de $X_t$, que anomenem $\varphi_t$, es pot escriure com

$$\varphi_t(u) = \exp\left[t\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 u + i\gamma u + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux\mathbf{1}_{[-1,+1]})\, \nu(\mathrm{d}x)\right)\right], \quad u \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \tag{9.1}$$

cosa que ens implica que la llei de $X_1$ estarà caracteritzada per la tripleta $(\sigma^2, \nu, \gamma)$, i la corresponent a la llei de $X_t$ per $(\sigma_t^2, \nu_t, \gamma_t) = (t\sigma^2, t\nu(\mathrm{d}x), t\gamma)$. Com a conseqüència, la mesura de Lévy associada a $X_t$ és $t\nu(\mathrm{d}x)$, on $\nu$ és la mesura de Lévy corresponent a la llei infinitament divisible de la variable $X_1$, la qual anomenarem *la mesura de Lévy associada al procés.*

La mesura de Lévy $\nu$ ens informa intuïtivament de com són els valors dels salts del procés i la seva intensitat. En el cas d'un Poisson clàssic, la mesura de Lévy seria $\lambda\delta_1(\mathrm{d}x)$, ja que tots els salts tenen mida 1.

En el cas d'un Poisson compost, la mesura de Lévy valdria $\lambda\mu(\mathrm{d}x)$, on $\lambda$ és el paràmetre del procés clàssic de Poisson que ens dóna els temps de salt i $\mu(\mathrm{d}x)$ seria la llei de probabilitat de les variables de la successió $Y_1, Y_2, \dots$ que ens indiquen les mides dels salts.

Si $\Lambda$ és un conjunt de Borel en $\mathbb{R}$ tal que la seva adherència no conté el 0, es demostra que si denotem la mida dels salts per $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$, on $X_{s-}$ és el límit per l'esquerra en el temps $s$, en sentit quasi segur, tenim que

$$\nu(\Lambda) = E\Big[\sum_{0<s\leq 1} \mathbf{1}_{\{\Delta X_s \neq 0,\, \Delta X_s \in \Lambda\}}\Big],$$

és a dir, la mesura $\nu$ és l'esperança del nombre de salts que hi ha fins al temps 1, tals que la mida del salt té un valor dins del conjunt $\Lambda$. Aquesta $\nu(\Lambda)$ és sempre finita. En canvi, si l'adherència de $\Lambda$ conté l'origen, la mesura podria ser $+\infty$. En el cas que $\nu(\mathbb{R}) < \infty$, el procés és forçosament un procés de Poisson compost.

La interpretació de la mesura de Lévy com a esperança ens permet deduir, per exemple, que si $\nu$ tan sols carrega la semirecta positiva, aleshores no hi pot haver, amb probabilitat 1, salts de mida negativa. El motiu és que la variable comptadora d'aquests salts sempre és no negativa, i com aquesta variable té esperança zero, deduïm que tots els salts tenen mida positiva.

Fixat un borelià $B$ en $[0,\infty) \times \mathbb{R}_0$, on $\mathbb{R}_0 := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, podem definir la mesura de salts $N$, que ens compta el nombre de salts del procés tals que la parella temps de salt i mida del salt és un punt del conjunt $B$. És a dir, definim la mesura $N$ com

$$N(B) = \operatorname{card}\{t \in (0,\infty) : (t, \Delta X_t) \in B\}.$$

Un teorema profund, intuït per Lévy i provat per Itô [20] amb una llarga demostració (vegeu [38, pàg. 119]), ens diu que les trajectòries d'un procés de Lévy són la suma de dues parts independents. Una contínua, formada per un sumand determinista $\gamma t$, més un brownià estàndard multiplicat per $\sigma \in \mathbb{R}$. L'altra part, associada als salts, és el límit d'una suma compensada de salts més una suma sense compensar. Concretament podem escriure

$$\begin{aligned} X_t = \gamma t + \sigma W_t + \iint_{(0,t]\times\{|x|>1\}} x \, \mathrm{d}N(s,x) + \\ + \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \iint_{(0,t]\times\{\epsilon<|x|\le 1\}} x \, \mathrm{d}\tilde{N}(s,x), \end{aligned}$$

on $W$ és el moviment brownià estàndard, $N$ és la mesura de salts definida abans, i $\mathrm{d}\tilde{N}(t,x) = \mathrm{d}N(t,x) - \mathrm{d}t\nu(\mathrm{d}x)$ és la mesura de salts compensada. D'altra banda $W$ i $N$ són processos independents. El límit és en sentit quasi segur, uniforme en $t$ per a cada interval fitat.

Aquest teorema ens indica que els únics processos de Lévy que amb probabilitat 1 tenen trajectòries contínues són bàsicament brownians amb una deriva determinista lineal.

Pot sorprendre la separació de la part de salts en dos sumands. El primer sumand, on integrem en $A = (0,t] \times \{|x| > 1\}$, no presenta problemes ja que el nombre de salts amb la parella temps i mida del salt que pertanyen a aquest conjunt $A$ és finit. En canvi, en l'altre sumand, si no compensem primer i prenem el límit després, podríem tenir problemes.

Si la mesura de Lévy satisfà la condició

$$\int_{|x|\le 1} |x| \, \nu(\mathrm{d}x) < \infty, \tag{9.2}$$

aleshores, la part de salts es pot escriure d'una manera molt més clara com

$$\iint_{(0,t]\times\mathbb{R}_0} x \, \mathrm{d}N(s,x), \tag{9.3}$$

i aquesta integral és finita (vegeu [38, teorema 19.3]). En aquest cas, la part discontínua és la suma dels valors de les mides dels salts que s'han produït fins a l'instant $t$.

La condició (9.2) sobre la mesura de Lévy és la condició necessària i suficient perquè la part de salts tingui variació fitada en $[0, T]$.

Remarquem que, per la definició de mesura de Lévy, sempre se satisfà que $\int_{|x|\le 1} |x|^2 \, dx < \infty$, però la condició (9.2) no té per què complir-se.

D'altra banda, com que amb probabilitat 1 les trajectòries brownianes no són de variació fitada, perquè les trajectòries del procés de Lévy tinguin variació fitada és condició necessària que no tinguin part browniana, és a dir la $\sigma^2$ de la tripleta ha de ser nul·la.

Per exemple, en el cas d'un procés de Poisson compost la mesura de Lévy serà $\lambda P(dx), \lambda > 0$, on $P$ és la llei de les mides dels salts i, per tant, la condició (9.2) sempre se satisfà. De totes maneres, com que el nombre de salts en l'interval $[0, T]$ és finit, és clar que per a un Poisson compost les trajectòries són de variació fitada, i que $X_t(\omega)$ és donat per la suma de les mides dels salts que es produeixen fins a l'instant $t$.

Pot passar, però, que la condició (9.2) es compleixi, i que $\int_{|x|\le 1} \nu(dx) = \infty$. En aquest cas hi hauria infinits salts en l'interval $[0, T]$, però el camí seria encara de variació fitada en aquest interval.

Per exemple, considerem ara un procés Gamma, $\{G_t, \, t \ge 0\}$, que és un procés de Lévy tal que $G_t$ té una llei Gamma amb mitjana $t$ i paràmetre d'escala igual a 1. Si el centrem, tenim el procés $\{X_t = G_t - t, \, t \ge 0\}$. La seva mesura de Lévy (la $\nu$ de la variable corresponent a $t = 1$) serà

$$\nu(dx) = \frac{e^{-x}}{x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) \, dx,$$

per tant, $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ que, com sabem, ens indica que, amb probabilitat 1, les trajectòries tenen infinits salts en $[0, T]$.

D'altra banda,

$$\int_{|x|\le 1} |x| \, \nu(dx) = \int_{0<x\le 1} e^{-x} \, dx < \infty,$$

de manera que els camins seran de variació fitada amb probabilitat 1. De fet, com que la mesura de Lévy tan sols carrega $\mathbb{R}_+$ i la condició (9.2) es compleix, podem escriure la part de salts amb la versió simplificada (9.3). Tots els salts tindran mida positiva, el valor del procés en el temps $t$ serà la suma de les mides dels salts anteriors a $t$, i les trajectòries seran creixents. Un procés de Lévy amb aquesta propietat s'anomena un *subordinador*, el qual ha estat objecte de molta atenció.

Si considerem ara el procés amb mesura de Lévy

$$\nu(dx) = \frac{e^{-x}}{x^2} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) \, dx,$$

aleshores $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ i, per tant, hi haurà, amb probabilitat 1, infinits salts en $[0, T]$, però, com que

$$\int_{|x|\leq 1} |x|\, \nu(\mathrm{d}x) = \int_0^1 \frac{1}{x} e^{-x}\, \mathrm{d}x = +\infty,$$

les trajectòries no són creixents ([38, teorema 21.5]), sinó que fluctuen malgrat que tots els salts són positius, ja que la mesura de Lévy que utilitzem no carrega $(-\infty, 0)$. Aquesta paradoxa prové del fet que, per a qualsevol $t > 0$, la suma de les mides dels infinits salts que es produeixen a $[0, t]$ és infinita amb probabilitat 1, i hem de compensar-la amb la integració respecte $\mathrm{d}t\nu(\mathrm{d}x)$, que també va a infinit (vegeu [38, pàg 138]).

Notem, finalment, que en el cas que hi hagi infinits salts en $[0, T]$, aquests es poden numerar però no ordenar i, per tant, ja no tindrà sentit la imatge que prové del procés de Poisson compost, en el qual parlem del primer temps de salt $T_1$, del segon temps de salt $T_2$, etc.

## 9.1 Moments de les variables d'un procés de Lévy

El teorema 8.7 ens deia que l'existència del moment finit d'ordre $k \geq 2$ per a una variable amb llei infinitament divisible és equivalent a la del moment d'ordre $k \geq 2$ de la seva mesura de Lévy associada, i que el cas $k = 1$, és a dir l'esperança, s'ha de tractar de manera diferent.

Com que les lleis de les variables $X_t$, $t > 0$, d'un procés de Lévy són infinitament divisibles i, per a $t$ fixat, la mesura de Lévy de $X_t$ és $t\nu$, on $\nu$ és la mesura de Lévy de la llei de $X_1$, hi podem aplicar el teorema 8.7 per a relacionar l'existència de moments finits de la variable amb els de la seva mesura de Lévy.

Com a conseqüència, si $X_1$ té la propietat de tenir moments finits fins a l'ordre $k$, aquesta propietat serà compartida per totes les variables $X_t$, $t > 0$, del procés. Serà, doncs, la mesura de Lévy $\nu$ de la variable del procés en el temps $t = 1$ la que ens marca l'existència de moments finits per a totes les variables del procés corresponents a temps positius.

Ja hem explicat en la secció 7 que l'existència de moments finits fins a un cert ordre és equivalent a la de cumulants fins al mateix ordre, i la relació entre uns i altres és donada per la família dels polinomis de Bell. A més, un resultat molt interessant ens diu que si $\{X_t, t \geq 0\}$ és un procés de Lévy amb tripleta $(\sigma, \nu, \gamma)$, i

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k\, \nu(\mathrm{d}x) < \infty, \quad k = 2, \ldots, n,$$

aleshores, la variable $X_t$ té cumulants fins a l'ordre $n$, que denotem per

$\kappa_1(t), \ldots, \kappa_n(t)$, i aquests valen

$$\kappa_1(t) = t\left(\gamma + \int_{|x|\geq 1} x\, \nu(\mathrm{d}x)\right),$$
$$\kappa_2(t) = m_2(t) = t\left(\sigma^2 + \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, \nu(\mathrm{d}x)\right) = t(\sigma^2 + m_2),$$
$$\kappa_k(t) = m_k(t) = t\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^k\, \nu(\mathrm{d}x)\right) = tm_k, \quad k = 3, \ldots, n,$$

on $m_2, \ldots, m_n$, són respectivament els moments de la mesura de Lévy $\nu$, des de l'ordre 2 fins al $n$.

## 10 Els polinomis espai-temps associats a un procés de Lévy

Hem vist en la secció 7 que la família $\Gamma_n, n \geq 1$, dels polinomis de Bell relacionava els moments amb els cumulants. Donat un procés de Lévy $\{X_t, t \geq 0\}$ centrat, aquests polinomis de Bell ens permetran construir un nou procés $M = \{M_t, t \geq 0\}$, definit com un polinomi en $X_t$ i $t$, de manera que el procés $M$ sigui una martingala. Qualsevol polinomi $P(x,t)$ amb aquesta propietat, és a dir que $\{P(X_t,t), t \geq 0\}$ sigui una martingala, direm que és un *polinomi harmònic espai-temps* en relació amb el procés de Lévy considerat.

El concepte de *martingala*, malgrat que la interpretació popular del nom sembla apuntar en una altra direcció, és el model matemàtic per a un joc just, en el sentit que l'esperança de l'increment $X_t - X_s, s < t$, condicionada a la informació del que ha passat fins a l'instant $s$, és zero. Una ressenya històrica interessant sobre martingales la trobareu en l'article de Nualart [32].

Recordem que si les variables d'un procés de Lévy tenen moments finits fins a l'ordre $n$ tindran també cumulants fins aquest ordre. Aquests cumulants estan relacionats amb els moments $m_k$, $2 \leq k < n$, de la mesura de Lévy (els quals també seran finits pel teorema 8.7) per les expressions del final de la secció anterior. El cas del primer cumulant, que és l'esperança, com ja hem explicat, és una mica particular, però ara, com que les variables del procés són centrades, $\kappa_1(t) = 0$.

A partir de la fórmula d'Itô per a processos de Lévy, la qual ens fa veure que el càlcul diferencial estocàstic té regles ben diferents de les del càlcul ordinari, es prova el teorema següent, en què es construeixen uns polinomis espai-temps a partir dels polinomis de Bell i els cumulants del procés (vegeu [42]).

Teorema 10.1. *Sigui $X$ un procés de Lévy centrat amb moments finits fins a l'ordre $k$. Aleshores, per a qualsevol $n \leq [\frac{k}{2}] + 1$, el procés*

$$M_t^{(n)} = Q_n(X_t, t) := \Gamma_n(X_t, -(m_2 + \sigma^2)t, -m_3 t, \ldots, -m_n t)$$

*és una martingala.*

Si el procés té tots els moments finits, qualsevol polinomi espai-temps $P(x,t)$ de grau $n$ en $x$, $n \geq 1$, podrà posar-se com una combinació lineal de la família de polinomis espai-temps donada pel teorema anterior:

$$\{Q_i(x,t) := \Gamma_i\Big(X_t, -(m_2+\sigma^2)t, -m_3 t, \dots, -m_i t\Big),\ i \leq n\}.$$

A continuació, seguint la línia de l'article [42], aplicarem aquest resultat a diferents processos de Lévy, i explicitarem els polinomis espai-temps associats.

## 10.1 Exemples de polinomis espai-temps

**10.1.1 El moviment brownià i els polinomis d'Hermite** Sigui el procés de Lévy $\{W_t,\ t \geq 0\}$ un moviment brownià estàndard. Aleshores $\sigma = 1$ i la mesura de Lévy serà $\nu = 0$. En aquest cas, tots els moments $m_n$, $n \geq 1$, de la mesura de Lévy són nuls. Si apliquem el teorema 10.1, veiem que els polinomis $Q_n^W$ associats són

$$Q_n^W(x,t) = \Gamma_n(x, -t, 0, \dots, 0),$$

i, per la fórmula de recurrència (7.2) dels polinomis de Bell, obtenim

$$Q_{n+1}^W(x,t) = xQ_n^W(x,t) - ntQ_{n-1}^W(x,t),\ n \geq 1.$$

Aquesta relació de recurrència ens caracteritza els polinomis anomenats d'*Hermite generalitzats* $H_n(x,t)$, definits a partir de l'expansió següent:

$$\exp\{ux - tu^2/2\} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,t)\frac{u^n}{n!}.$$

Els polinomis de grau més baix de la família són

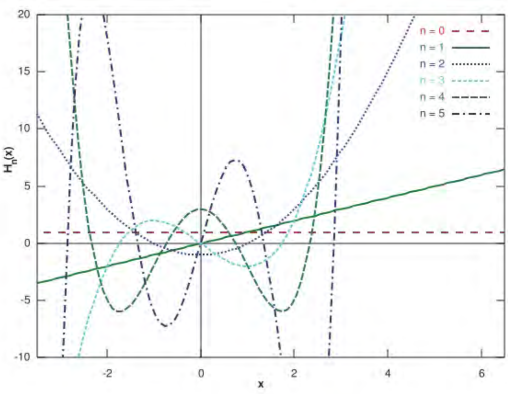
$$\begin{aligned}
H_0(x,t) &= 1\\
H_1(x,t) &= x\\
H_2(x,t) &= x^2 - t\\
H_3(x,t) &= x^3 - 3xt\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Aquests polinomis $H_n(x,t), n \geq 1$, són ortogonals respecte a la llei normal d'esperança zero i variància $t$, és a dir

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x,t)H_m(x,t)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\Big(-\frac{x^2}{2t}\Big)\,\mathrm{d}x = n!t^n\delta_{n,m},$$

on $\delta_{n,m}$ és la delta de Kronecker.

Ch. Hermite.




Polinomis d'Hermite clàssics.

Els polinomis d'Hermite clàssics $\{H_n(t), n \geq 0\}$ definits com $H_0 = 1$ i, per a $q \geq 1$,

$$H_q(x) = (-1)^q e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^q}{dx^q} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

coincideixen amb els generalitzats amb $t = 1$, és a dir són ortogonals respecte a la probabilitat normal estàndard. La relació entre les dues famílies de polinomis és

$$H_n(x, t) = t^{\frac{n}{2}} H_n(x/\sqrt{t}),\ t > 0.$$

Deixeu-me remarcar que els polinomis d'Hermite tenen un paper destacat en la teoria de la integració múltiple respecte al procés de Wiener $\{W_t,\ t \geq 0\}$. Si $h(z)$ és una funció de $L^2(\mathbb{R})$, aleshores podem definir la integral múltiple, respecte al procés de Wiener, de la funció determinista

$$h^{\otimes n}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = h(z_1) \times \cdots \times h(z_n),$$

la qual denotem per $I_n^W(h^{\otimes n})$. Aquesta integral múltiple serà el polinomi d'Hermite generalitzat aplicat a la integral d'ordre 1, $I_1^W(h)$, i al quadrat de la norma $L^2$ de la funció $h$, és a dir,

$$I_n^W(h^{\otimes n}) = H_n(I_1^W(h), \|h\|^2_{L^2(dx)}) = \|h\|^n_{L^2(dx)} H_n\left(\frac{I_1^W(h)}{\|h\|_{L^2(dx)}}\right).$$

Si $h(z_1) = \mathbf{1}_{[0,t]}$, la igualtat anterior ens diu que

$$\int_{[0,t]^n} \mathbf{1}^{\otimes n}_{[0,t]}\, \mathrm{d}W_{t_1} \ldots \mathrm{d}W_{t_n} = H_n(W_t, t) = t^{\frac{n}{2}} H_1\left(\frac{W_t}{t^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Un resum molt entenedor sobre la relació entre els polinomis d'Hermite i les integrals múltiples respecte al brownià el trobareu en el llibre de Peccati i Taqqu [34, secció 8.1].

### 10.2 El procés de Poisson i els polinomis de Charlier

Sigui $\{N_t,\ t \geq 0\}$ un procés de Poisson de paràmetre 1, i $\{\overline{N}_t = N_t - t,\ t \geq 0\}$ el procés de Poisson centrat. La mesura de Lévy associada és, com ja sabem, una delta de Dirac al punt 1 i, per tant, els seus moments són $m_n = \int_{\mathbb{R}} x^n\, \delta_1(\mathrm{d}x) = 1$, $n \geq 1$.

Pel teorema 10.1, obtenim els polinomis espai-temps següents:

$$Q_n^N(x,t) = \Gamma_n(x, -t, \ldots, -t).$$

La recurrència (7.2) serà ara

$$Q_{n+1}^N(x,t) = xQ_n^N(x,t) - t\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}Q_{n-j}^N(x,t).$$

Aquests polinomis els podrem escriure com la combinació lineal

$$Q_n(x,t) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(n)}C_j(x,t),$$

on $C_j(x,t), j \geq 1$, són els polinomis de Charlier centrats, els quals es defineixen a partir de l'expansió següent

$$e^{-ut}(1+u)^{x+t} = \sum_{n=0}^{\infty}C_n(x,t)\frac{u^n}{n!}.$$

Aquests polinomis de Charlier centrats estan relacionats amb els polinomis de Charlier clàssics $\{c_n(x,t),\ n \geq 0,\ t > 0,\ x = 0,1,2,\ldots\}$, els quals són polinomis ortogonals respecte a la llei de Poisson de paràmetre $t$, és a dir

$$\sum_{x=0}^{\infty}c_n(x,t)c_m(x,t)e^{-t}\frac{t^x}{x!} = \frac{n!}{t^n}\delta_{n,m},$$

on $\delta_{n,m}$ torna a ser la delta de Kronecker. La relació entre les dues famílies és

$$C_n(x,t) = t^n c_n(x+t,t),\ n \geq 0,\ t > 0,\ x = -t,\ -t+1,\ldots$$

Els primers polinomis de Charlier centrats són

$$\begin{aligned}C_0(x,t) &= 1\\ C_1(x,t) &= x\\ C_2(x,t) &= x^2 - x - t\\ &\vdots\end{aligned}$$

Com en el cas brownià, la integral múltiple d'ordre $n$, respecte al procés de Poisson centrat de paràmetre 1, de la funció $\mathbf{1}_{[0,t]}^{\otimes n}$, integral que denotem per

$I_n^{\overline{N}}(\mathbf{1}_{[0,t]}^{\otimes n})$, està lligada amb l'enèsim polinomi de Charlier centrat per la relació següent:

$$I_n^{\overline{N}}(\mathbf{1}_{[0,t]}^{\otimes n}) = C_n(\overline{N}_t, t).$$

A diferència, però, del cas brownià no podem generalitzar aquest resultat a integrals múltiples de funcions del tipus $h^{\otimes n}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = h(z_1) \times \cdots \times h(z_n)$, i això implica que l'estudi de la descomposició en caos en el cas Poisson no sigui paral·lel al del cas Wiener.

En el llibre de Peccati i Taqqu [34, secció 10] podeu trobar-hi un resum molt clar sobre aquestes qüestions.

Altres casos, com la suma d'un brownià i un Poisson independents o la d'un Poisson compost amb salts donats per una llei log-normal són també estudiats a [42].

## 11 Processos autosimilars i processos de Lévy estables. Vols de Lévy

El concepte d'*autosimilitud* ha estat objecte de molts estudis en camps diversos. En el dels processos estocàstics ha motivat la definició següent, que es basa en la invariància de les lleis en dimensió finita (és a dir les lleis dels vectors aleatoris formats per les variables del procés associades a subconjunts finits del temps) corresponents als processos obtinguts escalant convenientment el procés original en temps i en espai. Concretant, la definició d'un *procés autosimilar* és la següent (vegeu [38, definició 13.4]):

Definició 11.1. Direm que un procés $\mathbf{X} = \{X_t, t \geq 0\}$ és autosimilar si per a qualsevol $a > 0$, existeix $b > 0$ tal que el procés $\{X_{at}, t \geq 0\}$ té les mateixes distribucions en dimensió finita que $\{bX_t, t \geq 0\}$.

Si per a qualsevol $a > 0$, existeix $b > 0$ i una funció real $c(t)$ amb domini $[0, \infty)$ tal que el procés $\{X_{at}, t \geq 0\}$ té les mateixes distribucions en dimensió finita que $\{bX_t + c(t), t \geq 0\}$, direm que el procés $\mathbf{X}$ és autosimilar en sentit ampli.

Si el procés és autosimilar, existirà un número $H > 0$ tal que la relació entre $a$ i $b$ serà $b = a^H$ (vegeu [38, teorema 13.11]). Aquest número $H$ s'anomena l'*exponent d'autosimilitud* del procés.

La definició de *procés autosimilar* i la propietat anterior ens impliquen que per a qualsevol $t > 0$, la llei de $X_t$ és igual que la de $t^H X_1$. Aleshores, si les variables del procés autosimilar d'exponent $H$ tenen variància finita, es complirà que

$$E[X_t] = t^H E[X_1], \quad \mathrm{Var}(X_t) = t^{2H}\mathrm{Var}(X_1). \tag{11.1}$$

Ara la pregunta natural que ens fem és com són els processos de Lévy autosimilars. Com que si les variables d'un procés de Lévy tenen variàncies finites, aquestes han de complir que $\mathrm{Var}(X_t) = t\mathrm{Var}(X_1)$ i, si també és autosimilar, han de satisfer l'equació (11.1), obtenim que $t^{2H} = t$, $t > 0$, i, per tant, en aquest cas $H = \frac{1}{2}$.

D'altra banda, sabem que la funció característica de la variable $X_t$ d'un procés de Lévy té la forma (9.1), és a dir $\varphi_t(z) = \exp[-t\psi(z)]$. Per la propietat que tenen les funcions característiques de definir la llei, si hi ha autosimilitud de paràmetre $H$, tindrem que, per a qualsevol $t > 0$ i $z \in \mathbb{R}$, l'exponent $\psi(z)$ satisfà l'equació $\psi(t^H z) = t\psi(z)$.

Les solucions d'aquesta equació són de la forma $\psi(z) = C|z|^{\frac{1}{H}}$, però $\varphi_t(z) = \exp[-tC|z|^{\frac{1}{H}}]$ és la funció característica d'una distribució de probabilitat si i només si $H \geq \frac{1}{2}$. Aquest fet és a causa que si $H < \frac{1}{2}$, l'expressió anterior té derivada primera i segona nul·la en el zero, i, per tant, si fos una funció característica ho seria d'una llei amb variància zero, és a dir d'una variable degenerada, però aquesta té una funció característica constant per a $t \neq 0$, i arribem a una contradicció.

En el cas $H = \frac{1}{2}$, tenim la funció característica d'una gaussiana. Si $H > \frac{1}{2}$, la funció característica serà

$$\phi_t(z) = \exp[-t(\sigma^{\frac{1}{H}}|z|^{\frac{1}{H}})],$$

que, comparant amb (8.2) (aquí el paper de variable de la funció el fa la $z$ i no la $t$), correspon a una llei estrictament $\alpha$-estable amb $\alpha = \frac{1}{H}$, $\alpha < 2$.

A un procés de Lévy $X$ tal que la llei de $X_1$, la variable aleatòria que correspon a $t = 1$, és estrictament $\alpha$-estable, se l'anomena *estrictament estable*. Aquesta propietat de la llei no depèn del temps, és a dir, en un procés d'aquesta classe també totes les variables, per a $t > 0$, són estrictament $\alpha$-estables. Si la llei de $X_1$ és estable, aleshores direm que el procés és estable.

Resumint, la resposta a la nostra pregunta de com són els processos de Lévy autosimilars és que un procés de Lévy és autosimilar si i només si és estrictament estable. La relació que hi ha entre l'índex $H$ i $\alpha$ és $H = \frac{1}{\alpha}$. Com que $\alpha \in (0, 2]$, els índexs d'autosimilitud $H$ han de ser més grans o iguals que $\frac{1}{2}$. Anàlogament, un procés de Lévy és autosimilar en sentit ampli si i només si és estable.

Per exemple, un moviment brownià estàndard té per llei de $X_1$ una $N(0, 1)$, que com ja sabem, és una distribució estrictament $\alpha$-estable amb $\alpha = 2$, i serà un procés estrictament 2-estable i per tant autosimilar amb exponent d'autosimilitud $H = \frac{1}{2}$.

Referències molt interessants sobre tots aquests conceptes són el llibre de Sato [38, seccions 13 i 14] i el llibre de Samorodnitsky i Taqqu [37].

Els processos de Lévy estrictament $\alpha$-estables (vegeu la ressenya de [5, pàg. 99]) s'anomenen en física vols de Lévy. Deixeu-me comentar que el nom pot portar a confusió, ja que molts autors han utilitzat de manera indistinta el nom de *procés de Lévy* i el de vols de Lévy. Els vols de Lévy són tan sols una subfamília dels processos de Lévy, els quals s'han emprat molt per a la modelització en àmbits molt diversos. En la propera secció donarem alguns exemples d'aquest ús.

## 12 Modelització amb lleis estables i amb processos de Lévy

A la literatura es troben moltes i variades situacions modelades amb vols de Lévy. En realitat moltes vegades aquest nom s'utilitza de manera poc apropiada, ja que el que es presenta no és un procés estocàstic sinó tan sols una variable amb cues com les de les lleis estables amb $1 < \alpha < 2$, és a dir que no tenen variància, i altres amb $\alpha \leq 1$, les quals no tenen ni esperança finita.

### 12.1 Aplicacions a la modelització financera

Sigui $\{S_t, t \geq 0\}$ el procés dels preus d'una acció borsària. En la modelització financera s'utilitza molt el *log-return* $r_t(\Delta), \Delta \in \mathbb{R}_+$, definit com $\ln(\frac{S_{t+\Delta}}{S_t})$, és a dir, el logaritme neperià del quocient dels preus en els temps $t + \Delta$ i $t$.

Mandelbrot [27], ja l'any 1963, va examinar els *log-returns* dels preus del cotó i observà que les variàncies mostrals no convergien quan agafava més dades, és a dir, mides mostrals més grans. Això li féu sospitar que la distribució que modelava els *log-returns* no havia de tenir moment de segon ordre finit i, per tant, la gaussiana no era una llei apropiada. Proposà llavors utilitzar lleis estables amb $\alpha < 2$, les quals, com sabem, no tenen variància finita. Aquest estudi fou el punt de partida per a la modelització amb moltes lleis distintes, una llista de les quals trobareu a [5, pàg. 221]; totes aquestes però comparteixen la propietat de ser infinitament divisibles. El mateix Mandelbrot publicà diferents articles en aquesta línia.

D'altra banda, Cont i Tankov [5, pàg. 211] destaquen, entre les propietats característiques de les dades financeres, que els *log-returns*, com ja deia Mandelbrot, solen tenir cues pesades, de manera que no tenen moments de tots els ordres finits, però que, en general, el seu *índex de cues*, terme amb el qual es designa el suprem dels ordres dels moments que són finits, es troba entre dos i cinc. Aquesta afirmació evidentment no engloba els *returns* del cotó estudiats per Mandelbrot. Per tant, les distribucions estables tampoc no serien un bon model, ja que excepte la gaussiana, que té cues massa lleugeres i moments finits de tots els ordres, totes les altres no tenen moment de segon ordre finit. Es proposen, aleshores, lleis tipus Pareto, però és sempre una qüestió difícil determinar la forma precisa de les cues.

Cont i Tankov fan notar que la invariància d'escala, tan característica de les lleis estables i que tant motivava Mandelbrot, no sembla donar-se en les dades financeres, ja que els comportaments diaris i els anuals no segueixen aparentment el mateix patró. Aquest fet també va en contra de la modelització amb lleis estables, tan lligades amb l'autosimilitud, com hem vist en la secció prèvia.

Shiryaev [40] proposa utilitzar lleis amb moments finits fins a l'ordre 3,5. Remarquem, doncs, com a resum d'aquesta secció, que en la modelització financera dels *log-returns*, les lleis que semblen més apropiades pertanyen a la família de les que no tenen moments finits de tots els ordres.

D'altra banda, el procés estocàstic dels preus, $\{S_t, t \geq 0\}$, d'un actiu financer sembla modelar-se millor amb un procés de difusió amb salts que amb un procés de trajectòries contínues. El primer treball en aquest sentit fou el de Merton [29], qui proposà el procés següent:

$$S_t = S_0 \exp\left[\mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right],$$

on $W$ és un brownià estàndard i $\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ un procés de Poisson compost, independent del brownià, amb mides de salts gaussianes. Veiem, doncs, que l'exponent és un procés de Lévy amb una part de salts. La novetat davant del model tradicional, anomenat *de Black-Scholes*, va ser el fet d'afegir-hi aquest terme no continu.

Aquest nou model necessita un tractament diferent del tradicional, perquè ara el mercat no serà complet. Això comporta la no unicitat de la mesura de probabilitat per a la qual el preu $\{\widehat{S_t},\ t \geq 0\}$, ja descomptat de l'efecte del rèdit bancari fix, esdevé una martingala. Evidentment, tot seguit s'inicià una llarga llista de treballs on el procés de Lévy subjacent és cada vegada més general.

## 12.2 Una altra mirada a la paradoxa de Sant Petersburg

En la secció 5 hem estudiat la paradoxa de Sant Petersburg. Hi denotàvem per $X_n$, $n \geq 1$ els premis obtinguts en el joc enèsim, i l'element paradoxal venia del fet que aquestes variables aleatòries tenien esperança infinita. Havíem vist el resultat de Feller següent,

$$\frac{S_N}{N \log_2 N} \longrightarrow 1, \quad N \to \infty, \tag{12.1}$$

on $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ ens indica els premis acumulats després de $N$ jocs i la convergència és en probabilitat.

Martin-Löf publicà, el 1985, un article interessant [28], en el qual estudia aquesta paradoxa sota la llum de les distribucions infinitament divisibles.

Considera el quocient

$$\frac{S_N - 2N \log_2 N}{2N},$$

que, tenint en compte el resultat de Feller (12.1), presenta una indeterminació quan $N \to \infty$.

Martin-Löf demostra que si $N = 2^n$, l'anterior expressió té un límit en llei, quan $n \to \infty$, que és una distribució infinitament divisible. Per tant, la seva funció característica sera donada per la fórmula de Lévy-Khintchine (teorema 8.4), és a dir serà de la forma $\varphi(u) = \exp(g(u))$.

A l'article es troba l'expressió explícita de l'exponent $g(u)$, de la qual podem deduir la mesura de Lévy associada a la llei. La funció de distribució corresponent a aquesta llei límit la denotem per $G(x)$.

Sigui ara $S$ una variable aleatòria amb funció de distribució $G(x)$, és a dir, $P(S \leq x) = G(x)$. Martin-Löf [28, teorema 4] dóna el comportament asimptòtic de la funció de distribució $G$ següent:

$$1 - G(2^m + x) = P(S > 2^m + x) \sim 2^{-m}(2 - G(x)), \text{ quan } m \to \infty.$$

Els valors de $G(x)$ es calculen amb mètodes numèrics a partir de la transformada de Fourier inversa (expressió 8.3) de la funció característica. L'equivalència anterior és molt bona, fins i tot per a valors de $m$ petits. L'error relatiu que tenim en calcular $2^m(1 - G(2^m + x))$ utilitzant $2 - G(x)$, quan $m = 5$ i $-2 \leq x \leq 20$, és menor del 6%, i, en el mateix rang de la $x$, amb $m = 9$, és tan sols del 3%.

Finalment, per a $N = 2^n$, arriba a l'aproximació

$$P(S_{2^n} > 2^n(2n + 2^{m+1} + 2x)) \approx 2^{-m}(2 - G(x)), \tag{12.2}$$

que és bona si $n$ no és massa petit i $m \geq 5$.

Suposem que l'organitzador del joc vol cobrar una quota fixa $q_{2^n}$ al jugador pel dret de fer cada partida, i que aquest es compromet a jugar exactament $2^n$ jocs, de manera que la probabilitat que la suma de les $2^n$ quotes no sigui suficient per a cobrir els premis totals, valgui un valor $r$ fixat. Aleshores, si

$$q_{2^n} = 2n + 2^{m+1},$$

sent $m$ la solució de l'equació $r = 2^{-m}(2 - G(0))$, on $G(0) \approx 0,2$, aplicant (12.2) amb $x = 0$, veiem que es compleix el que desitja.

Per exemple, suposem que l'organitzador decideix cobrar una quota per joc, de manera que, després de $2^n$ jocs, tingui una probabilitat $10^{-3}$ de no poder cobrir el total dels premis amb la suma de les quotes, que és $2^n \times q_{2^n}$. Aleshores, com que $r = 10^{-3}$, calculem que $m \approx 11$ i, per tant, la quota $q_{2^n}$ per joc seria aproximadament de $(2n + 4.096)$ euros.

## 12.3 Aplicació a la modelització de terratrèmols

Posadas i altres autors proposen a [35] un model per a estudiar la distribució de terratrèmols en una certa àrea geogràfica. Consideren simultàniament les posicions dels epicentres i els temps en què es produeixen els terratrèmols. Introdueixen un procés que presenta una trajectòria observable tal que roman en un epicentre fins que es produeix un nou moviment sísmic, moment en el qual salta a la posició del nou epicentre. Encara que el procés seria a valors en $\mathbb{R}^2$, suposem aquí que ens movem a $\mathbb{R}$. La trajectòria tindrà, doncs, salts positius i negatius de mida el valor de les diferències entre les coordenades dels epicentres corresponents a terratrèmols consecutius, i aquestes discontinuïtats es produiran en els temps en què es detecten els moviments sísmics. Entre els salts, les trajectòries prenen valors constants.

Denotem per $T_1, T_2, \ldots$ els temps en què es produeixen el primer, segon... terratrèmol i per $\{Y_n, n \geq 1\}$, les distàncies amb signe entre les posicions dels epicentres dels moviments sísmics consecutius. Anomenem $N_t$ el nombre de salts efectuats fins al temps $t$, és a dir, $N_t = \max\{n; T_n \leq t\}$. El procés es pot escriure com

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \geq 0, \tag{12.3}$$

amb el conveni usual que si $N_t = 0$, aleshores $X_t = 0$.

La successió de les mides dels salts $Y_1, Y_2, \ldots$ l'agafen i. i. d., independent dels temps de salt, i proposen per a aquestes mides una llei de potències amb mitjana zero i un comportament asimptòtic donat per $c\frac{1}{|y|^{\alpha_e}}$, amb un exponent $\alpha_e > 3$, fet que, com sabem, ens implica que la distància entre epicentres tindrà variància finita.

D'altra banda, els temps d'espera $T_1, T_2 - T_1, \ldots$ entre terratrèmols consecutius formen també una successió i. i. d., amb lleis de potències de cues molt més pesades que les dels valors dels salts, de manera que els temps d'espera siguin variables sense variància finita. Per tant, l'exponent $\alpha_T$ de la llei temporal serà més petit que l'exponent espacial $\alpha_e$. Un valor típic és $\alpha_T = 1,5$, que ens implica la no existència d'esperança finita per a la variable temps entre terratrèmols. Els ordres de les cues de les dues distribucions del model, l'espacial i la temporal, dependran de la zona sísmica estudiada.

Els autors apliquen el model a les dades de registres sísmics del sud-est de la península Ibèrica, concretament a la serralada Penibètica i al mar d'Alborán, i obtenen, a partir de les dades, l'interval de confiança $[1,53, 1,66]$ per a l'exponent temporal $\alpha_T$. Fixeu-vos que el valor $1,5$ d'abans estaria lleugerament fora d'aquest interval.

D'altra banda, en relació amb la modelització dels terratrèmols, en un article interessant Álvaro Corral [6] comenta que la variable $E$, energia dissipada per un terratrèmol, té una llei amb una densitat que presenta un comportament asimptòtic del tipus $\frac{1}{E^{1,67}}$. Per tant, l'energia és un altre exemple de variable sense esperança finita. Deixeu-me recordar que l'energia dissipada $E$ i la magnitud $M$ d'un terratrèmol, mesurada en l'escala Gutenberg-Richter, tenen la relació exponencial

$$E = 60.000 \times 10^{1,5M} \text{ joules},$$

és a dir si la magnitud s'incrementa en una unitat, l'energia es multiplicarà aproximadament per un factor $10^{1,5} = 31,6$.

Es considera que si es produeix un terratrèmol, la probabilitat que sigui de magnitud $M$ és donada per

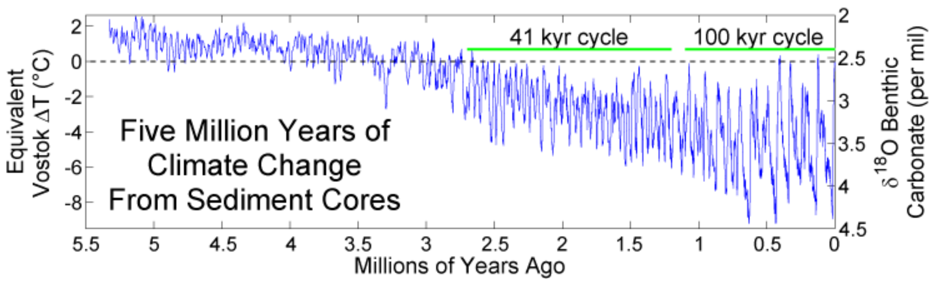
$$P(M) = c10^{-M},$$

i, per tant, deduïm que per cada terratrèmol de magnitud 8 n'hi haurà aproximadament 10 de magnitud 7, 100 de magnitud 6... Tot això ens indica que encara que és molt probable que els terratrèmols siguin quasi sempre petits i dissipin poca energia, quan se'n produeixi un de gran, fet que té baixa probabilitat, com que l'energia que dissipen aquests és immensa, passarà el mateix que hem comentat en la paradoxa de Sant Petersburg, i l'esperança de l'energia és infinita.

Notem que la funció de potència és l'única que és invariant sota canvis d'escala. Per tant, com que els terratrèmols tenen un comportament modelat per una llei de potències, deduïm que presentaran el comportament fractal que tant agradava a Mandelbrot.

Si voleu llegir més sobre aquestes qüestions us recomano l'article de Corral [7], que he triat entre la llarga llista que trobareu en la seva pàgina web. D'altra banda, a [6] hi ha descrits també altres casos de fenòmens catastròfics, que són modelats per lleis de potències. Per exemple, la quantitat de matèria que un volcà expulsa a l'exterior en una erupció, la quantitat de roca despresa en una allau a la muntanya o la superfície afectada per un incendi forestal. També la distribució de grandàries dels clústers en fenòmens crítics, com les de les mides de les bombolles de vapor en l'aigua en ebullició o les dels clústers dels espins alineats en els materials ferromagnètics a prop de la temperatura crítica. Aquests dos darrers fenòmens mostraran, doncs, sota condicions crítiques, una invariància per canvis d'escala que no es manifestarà en altres temperatures.

Volcà Santa Helena.




Registre de temperatures (web P. Imkeller).

## 12.4 Aplicació a les temperatures mitjanes de la Terra

El 1993 es va publicar un article a *Nature* [8], en el qual a partir de l'estudi del gel obtingut en una perforació feta en una gelera de Groenlàndia, a 3.283 metres sobre el nivell del mar i en les coordenades 72,58° N i 37,64° W, perforació que arribà quasi fins a la base de roca, situada a una profunditat de 3.000 metres, es determinà la sèrie temporal de les temperatures anuals mitjanes, a la regió de l'Atlàntic nord, dels darrers 250.000 anys.

Com que cada any es diposita a la gelera una capa de gel, aquest fet, similar al dels anells dels arbres, permet determinar l'antiguitat de la capa. Els investigadors registraren en les distintes capes la desviació respecte al valor mitjà oceànic de la proporció de l'oxigen 18 amb l'oxigen 16. Aquesta desviació resulta ser una funció coneguda de la temperatura mitjana en l'època de formació del gel i, per tant, calculant la funció inversa dels valors de les proporcions obtingudes experimentalment determinaren la sèrie de les temperatures.

En la sèrie temporal s'hi observaren variacions molt ràpides, tant refredaments com escalfaments, de la temperatura mitjana a l'Atlàntic nord, que podem considerar matemàticament com a salts en la trajectòria de les temperatures. Aquests períodes de canvi ràpid constitueixen els episodis de Dansgaard i de Oeschger. Entre aquests episodis, la temperatura és força estacionària, amb fluctuacions relativament petites.

Ditlevsen [9] veié que més que observar directament la proporció de l'isòtop d'oxigen 18, era preferible determinar el logaritme de la quantitat del senyal de calci, el qual és present en el gel en forma de pols. Aquest logaritme té una alta correlació amb la proporció dels isòtops d'oxigen i, per tant, també ens determina la temperatura, fent-ho, però, amb una resolució molt millor que el mètode anterior.

Ditlevsen proposà l'equació següent per al procés $\{X_t,\ t \geq 0\}$, el qual modela el logaritme del senyal de calci:

$$X_t = x + \int_0^t f(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \eta_t, \quad t \geq 0,$$

on $f$ és la derivada d'un potencial de doble pou. Aquest potencial ens dóna compte de l'efecte de la circulació oceànica en el clima. D'altra banda, el soroll additiu $\{\eta_t, t \geq 0\}$, que modela l'efecte de l'atmosfera, el considera un procés de Lévy amb una part browniana i una de salts que correspon a un procés $\alpha$-estable. Finalment, estimà el valor del paràmetre $\alpha$ a partir de la sèrie experimental obtinguda i trobà un valor $\alpha = 1,75$.

Recentment, Claudia Hein i Peter Imkeller [18] estudien una equació de Ditlevsen simplificada, en la qual el potencial és $C^2$ i té un únic pou, que podem agafar com un mínim a l'origen. Com a soroll agafen també un procés $\eta_t$ que sigui $\alpha$-estable. A l'article estudien el comportament asimptòtic de la $p$-variació, definida com $V_p^n(X)_t := \sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X|^p$, on $[nt]$ és la part entera de $nt$, i $\Delta_i^n X := X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}}$, per a $1 \leq i \leq [nt]$, $n \geq 1$, $p > 0$.

Els autors dedueixen el teorema següent, en el qual la convergència és en el sentit de la topologia de Skorohod, l'adequada en l'espai de les funcions cadlag, i la llei de $\eta_1$ es descriu amb una tripleta del tipus (8.1).

Teorema 12.1. *Sigui $\{L_t, t \geq 0\}$ un procés $\alpha$-estable, on $L_1$ té una llei amb tripleta $(\sigma, \beta, 0)$, i $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció localment fitada tal que, per a algun $x \in \mathbb{R}$ i $T > 0$, existeix una única solució forta de l'equació*

$$X_t = x + \int_0^t f(s, X_s)\,\mathrm{d}s + L_t, \quad t \in [0, T].$$

*Aleshores, per a $p > \frac{\alpha}{2}$, tenim*

$$(V_p^n(X)_t - ntB_n(\alpha, p))_{0 \leq t \leq T} \longrightarrow (L'_t)_{0 \leq t \leq T}, \quad n \to \infty,$$

*on $L'$ és un procés $\frac{\alpha}{p}$-estable de tripleta $(\sigma', 1, 0)$, amb*

$$\sigma' = \begin{cases} \sigma^p \left( \dfrac{\cos(\frac{\pi\alpha}{2p})\Gamma(1-\frac{\alpha}{\pi})}{\cos(\frac{\pi\alpha}{2})\Gamma(1-\alpha)} \right)^{\frac{p}{\alpha}}, & p \neq \alpha, \\ \sigma, & p = \alpha, \end{cases}$$

*$(B_n(\alpha, p))_{n \geq 1}$ és determinista i val*

$$B_n(\alpha, p) = \begin{cases} n^{-\frac{p}{\alpha}} E[|L_1|^p], & p \in (\frac{\alpha}{2}, \alpha), \\ E[\sin(n^{-1}|L_1|^\alpha)], & p = \alpha, \\ 0, & p > \alpha. \end{cases}$$

Si posem la condició $p = 2\alpha$, aleshores $B_n(\alpha, p) = 0$. La llei de la variable límit $L'_1$ serà una distribució estable de paràmetre $\frac{\alpha}{p} = \frac{1}{2}$, és a dir, una llei de Lévy (vegeu la taula de la subsecció 8.2) amb un paràmetre d'escala $\sigma'$, la qual té per funció de distribució

$$F_{\frac{1}{2},\sigma'}(x) = \sqrt{\frac{\sigma'}{2\pi}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{\sigma'}{2y}}}{y^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}y, \quad x > 0. \tag{12.4}$$

Recordem que la distància de Kolmogorov entre dues lleis $P$ i $Q$ es defineix com la distància del suprem entre les funcions de distribució respectives, és a dir,

$$d_K(P,Q) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |P((-\infty,x] - Q(-\infty,x])|.$$

Numèricament busquem els valors de $\sigma'$ i $p$ tals que la distància de Kolmogorov-Smirnov entre la llei de Lévy (12.4) del límit $L_1'$ i la distribució empírica de la variació d'ordre $p$ sigui mínima. Aquests valors els denotem per $\sigma^*$ i $p^*$. Ara només queda estimar $\alpha$ per a $\frac{p^*}{2}$.

Hein i Imkeller apliquen aquest mètode a la sèrie temporal de les temperatures mitjanes de l'Atlàntic nord, i obtenen una estimació $\hat{\alpha} \approx 0,7$ que és molt diferent del valor $1,75$ donat per Ditlevsen, qui potser només va trobar un mínim local. De totes maneres una diferència de més d'una unitat entre les dues estimacions fa malpensar.

Si el lector està interessat en més exemples de modelització amb vols de Lévy li recomano, entre la gran quantitat de literatura dedicada al tema, el llibre de Shlesinger *et al.* [41], així com l'article [10] publicat a *Nature*, on s'estudia el comportament, en relació amb el temps i la distància de vol, dels albatros viatgers (els ocells marins de l'espècie *Diomedea exulans*), a les illes Geòrgia del Sud.

Després de llegir totes aquestes pàgines espero haver-vos convençut que l'estudi del comportament de les cues d'una distribució, és a dir, dels valors grans d'una variable, encara que tinguin probabilitats petites, no és una curiositat sinó un tema central en la teoria de la probabilitat.

## Referències


[1] Applebaum, D. *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. (Cambridge Stud. Adv. Math.; 93)

[2] Bernoulli, D. «Exposition of a new theory on the measurement of risk». *Econometrica*, vol. 22 (1) (1954), 22–36. [Traducció a l'anglès de l'article original de 1738]

[3] Billingsley, P. *Probability and measure*. Hoboken, N. J.: Wiley, 1979. (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics)

[4] Breiman, L. *Probability*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1968.

[5] Cont, R.; Tankov, P. *Financial modelling with jump processes*. Boca Raton, Fla.: CRC Press, 2004. (Chapman & Hall / CRC Financ. Math. Ser.)

[6] Corral, Á. «Física estadística dels fenòmens catastròfics». A: Jou, D.; Llebot, J. E. (ed.). *Física de cada dia*: *IV Cicle Francesc Salvà i Campillo*. Sabadell: Fundació Caixa Sabadell, 2007, 45–67.

[7] Corral, Á. «Structure of earthquake ocurrence in space, time and magnitude». *Terra Nova*, 19 (2007), 337–343.

[8] Dansgaard, W.; Johnsen, S. J.; Clausen, H. B.; Dahl-Jensen, D.; Gundestrup, N. S.; Hammer, C. V.; Hvidberg, C. S.; Steffensen, J. P.; Sveinbjörnsdottir, A. E.; Jouzel, J.; Bond, G. «Evidence for general instability of past climate from 250 kyr ice-core record». *Nature*, 364 (1993), 218–220.

[9] Ditlevsen, P. L. «Observation of $\alpha$-stable noise induced millenial climate changes from an ice core record». *Geophysical Research Letters*, 26 (10) (1999), 1441–1444.

[10] Edwards, A. M.; Phillips, R. A.; Watkins, N. W.; Freeman, M. P.; Murphy, E. J.; Afanasyev, V.; Buldyrev, S.; Luz, M. da; Raposo, E.; Stanley, H.; Viswanathan, G. «Revisiting Lévy flight search patterns of wandering albatrosses, bumblebees and deer.» *Nature*, 449 (2007), 1044–1048.

[11] Feller, W. «Note on the law of large numbers and fair games». *Ann. Math. Statist.,* 16 (3) (1945), 301–304.

[12] Feller, W. *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones.* Vol. 1. Mèxic: Limusa, 1988.

[13] Feller, W. *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones.* Vol. 2. Mèxic: Limusa, 1988.

[14] Gutt, A. *Probability: A graduate course*. Londres: Springer, 2005. (Springer Series in Statistics)

[15] Gutt, A. «An extension of the Kolmogorov-Feller law of large numbers with an application to the St. Petersburg game». *J. Theoret. Probab.*, 17 (3) (2004), 769–779.

[16] Hald, A. «T. N. Thiele's contribution to statistics». *International Statistical Review*, 49 (1) (1981), 1–20.

[17] Hald, A. «The early history of the cumulants and the Gram-Charlier series.» *International Statistics Review*, 68 (2) (2000), 137–153.

[18] Hein, C.; Imkeller, P.; Pavlyukevich, I. «Limit theorems for $p$-variations of solutions of SDEs driven by additive stable Lévy noise and model selection for paleo-climatic data». A: Duan, J.; Luo, S.; Wang, C. (ed.). *Recent developments in stochastic dynamics and stochastic analysis*. Hackensack, N. J.: World Scientific, 2009. (Interdiscip. Math. Sci.; 8), 137–150.

[19] Heyde, C. C. «On a property of the lognormal distribution». *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, 25 (1963), 392–393.

[20] Itô, K. «On stochastic processes, I». *Jpn. J. Math.*, 18 (1942), 261–301.

[21] Jacod, J. «A short biography of Paul Lévy». A: *Lévy Matters I*. Berlín: Springer, 2010. (Lecture Notes in Math.; 2001)

[22] Kingman, J. F. C. *Poisson processes.* Nova York: Oxford University Press, 1995. (Oxford Science Publications. Oxford Studies in Probability; 3)

[23] Lévy, P. *Calcul des probabilités*. París: Gauthier-Villars, 1925.

[24] Lévy, P. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. París: Gauthier-Villars, 1937.

[25] Lévy, P. *Processus stochastiques et mouvement brownien*. París: Gauthier-Villars, 1948.

[26] Loève, M. «Paul Lévy, 1886–1971». *Annals of Probability*, 1 (1) (1971), 1–18.

[27] Mandelbrot, B. B. «The variation of certain speculative prices». *J. Business*, 36 (4) (1963), 392–417.

[28] Martin-Löf, A. «A limit theorem which clarifies the Petersburg paradox». *J. Appl. Probab.*, 22 (3) (1985), 634–643.

[29] Merton, R. «Option pricing when underlying stock returns are discontinuous.» *J. Financial Economics,* 3 (1976), 125–144.

[30] Nica, A.; Speicher, R. *Lectures on the combinatorics of free probability.* Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[31] Nourdin, I.; Peccati, G. «Poisson approximations on the Wigner chaos». *Preprint*, 2011.

[32] Nualart, D. «Les martingales i les seves aplicacions des d'una perspectiva històrica». *Butll. SCM.*, 4 (1989), 47–67.

[33] Parrondo, J. M. R. «*Sortis in Ludis*: de la paradoja de San Petersburgo a la teoría de la utilidad». *Curs Euler. Conferències FME, UPC*, 4 (2007), 61–78.

[34] Peccati, G.; Taqqu, M. *Wiener chaos: moments, cumulants and diagrams*. Milà: Springer, 2011. (Bocconi & Springer Series; 1)

[35] Posadas, A.; Morales, J.; Vidal, F.; Sotolongo-Costa, O.; Antoranz, J. C. «Continuous time random walks and south Spain seismic series». *J. Seismology*, 6 (2002), 61–67.

[36] Resnick, S. I. *A Probability path*. 2a ed. correg. Boston: Birkhäuser, 2001.

[37] Samorodnitsky, G.; Taqqu, M. S. *Stable non-Gaussian random processes.* Boca Raton, Fla.: Chapman & Hall / CRC, 1994.

[38] Sato, K. I. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 68)

[39] Shiryaev, A. N. *Probability*. Nova York: Springer, 1984. (Graduate Texts in Mathematics; 95)

[40] Shiryaev, A. N. *Essentials of stochastic finance*: *Facts, models, theory.* Hackensack, N. J.: World Scientific, 2000. (Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability; 3)

[41] Shlesinger, M. F.; Zaslavsky, G. M.; Frisch, U. (ed.). *Lévy flights and related topics in physics*. Berlín: Springer, 1994.

[42] Solé, J. L.; Utzet, F. «Time-space harmonic polynomials relative to a Lévy process». *Bernoulli*, 14 (1) (2008), 1–13.

[43] Tamarkin, J. D.; Shohat, J. *The problem of moments*. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1943. (Math. Surveys Monogr.; 1)

[44] *Earliest use of symbols in probability and statistics* [en línia] http://jeff560.tripod.com/stat.html/ [consulta: 29 de maig de 2012].

Departament de Matemàtiques
Facultat de Ciències
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra
jllsole@mat.uab.cat